

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 32

August/September

Heft 8/9

Jahrestagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik

Die diesjährige Tagung der GaMM fand vom 4.—7. Juni in Braunschweig statt. Sie war von etwa 250 Mitgliedern aus dem In- und Ausland besucht. Nach einem zwanglosen Begrüßungsabend am Mittwoch begann nach der Eröffnungssitzung am Donnerstag früh die Arbeitstagung. Auf ihr wurden mehr als 70 Vorträge gehalten. Den Inhalt des größten Teiles dieser Vorträge bringt das vorliegende Heft in Autorreferaten. Die Zahl der Vorträge war so groß, daß im allgemeinen drei Parallelsitzungen stattfinden mußten. Freitag früh fand die Hauptversammlung der GaMM statt. Nachdem der im verflossenen Jahr verstorbenen Mitglieder gedacht war, gab der Vorsitzende, Professor Grammel, den Jahresbericht. Die Zahl der Mitglieder ist Dank der hervorragenden Werbetätigkeit von Professor Görtler im vergangenen Jahre von 340 auf 450 angewachsen, 120 davon wohnen im Ausland. Darauf wurde kurz über das auf der Ile de Porquerolles von der JUTAM veranstaltete Symposium über nichtlineare Schwingungen und über die Massaufeier berichtet. Sodann wurde auf Antrag der Kassenprüfer dem Rechnungsführer Entlastung erteilt. Die Mitgliederbeiträge wurden auch für das nächste Jahr auf 5.—DM festgesetzt. Zum allgemeinen Bedauern lehnte Herr Grammel eine Wiederwahl zum Vorsitzenden ab. Es wurden gewählt: Zum Vorsitzenden Herr Walther, zum stellvertretenden Vorsitzenden Herr Mettler und für die aus dem Vorstandsrat ausscheidenden Herren L. Föppl und Mettler, die Herren Grammel und Rehbock. Herr Walther sprach sodann Herrn Grammel den Dank dafür aus, daß er die GaMM wieder ins Leben gerufen und bisher erfolgreich geleitet habe. Als Orte für die nächsten Tagungen wurden in Aussicht genommen für 1953 Aachen und für 1954 München. Am Schluß wurde dem örtlichen Vorsitzenden Herrn Rehbock, herzlicher Dank für die ausgezeichnete Vorbereitung der Tagung ausgesprochen. Mit einem Ausflug in den Elm und einem gemeinsamen Abendessen schloß am Samstagabend diese ausgezeichnet verlaufene Tagung. Auch an dieser Stelle sei nochmals im Namen aller Teilnehmer Herrn Rehbock für die große Mühe gedankt, die er auf die Vorbereitung dieser schönen Tagung verwandt hat.

Willers.

A. Praktische Analysis

Fehlerabschätzung für die zweite Randwertaufgabe der ebenen Potentialtheorie

Von G. Bertram in Hannover

Es wird ein Verfahren angegeben, nach dem man für ebene, konform auf den Einheitskreis abbildbare Bereiche mit stückweise glatter, doppelpunktfreier Berandung bei bekannter Abbildungsfunktion fertige Abschätzungsformeln bereitstellen kann, welche die Ermittlung von Fehlerschranken für eine harmonische Näherungslösung einer zweiten Randwertaufgabe der ebenen Potentialtheorie aus der vorgegebenen Quell-Senken-Belegung einerseits und der Näherung andererseits ermöglichen. Als typische Beispiele werden Kreis-, Halbkreis-, Quadrat- und Rechtecksbereiche diskutiert. (Für die erste und bei geeigneten Voraussetzungen für die dritte Randwertaufgabe erledigt sich die entsprechende Frage unter Verwendung von Randmaximumsätzen.) Einzelheiten soll eine später in dieser Zeitschrift erscheinende Arbeit enthalten.

Interpolation mit Hyperbeln zweiten Grades

Von U. T. Bödewadt in Brunoy

Vom Interpolationsfunktionen sind außer den Haupteigenschaften, stetig zu sein und die Sollwerte anzunehmen, je nach dem Anwendungsfall noch weitere Eigenschaften zu fordern. Rechnerische Einfachheit kommt erst in dritter Linie. Soll die Funktion z. B. positiv und (möglichst) monoton sein, dann können gebrochene rationale Funktionen (Hyperbeln) den ganzen (den Parabeln) vorzuziehen sein. Verf. untersucht die Kurven mit einem Pol erster und einem Pol zweiter Ordnung (Isothermen der *Van der Waals*-Gleichung). Sie haben fünf Parameter. Der Doppelpol wäre aus 5 Punkten durch eine Gleichung 18. Grades zu bestimmen; nimmt man seine Stelle versuchsweise an, so folgt die Stelle des Einfachpoles mit einer quadratischen Gleichung aus 4 Punkten. Die Formeln für die Koeffizienten dieser Gleichung werden angegeben. Um der Stetigkeit willen ist darauf zu achten, daß beide Polstellen außerhalb des Interpolationsgebietes fallen.

Fehlerabschätzungen zum Iterationsverfahren bei linearen und nichtlinearen Randwertaufgaben.

Von L. Collatz in Hannover

Eine in der Funktionsanalysis für das Iterationsverfahren aufgestellte Fehlerabschätzung (J. Weibinger, Z. angew. Math. Mech. 31 (1951), S. 245) liefert bei Verwendung passender Normbegriffe übersichtlich verschiedene schon bekannte und zugleich neue Abschätzungen. Bei nichtlinearen Gleichungssystemen für Unbekannte x_1, \dots, x_m , (Komponenten eines Vektors x) erhält man bei der Norm $\|x\| = \max |x_j|$ das Zeilensummenkriterium, bei der Norm $\|x\| = \sum |x_j|$ das Spaltensummenkriterium und bei der gewöhnlichen Länge als Norm das Erhard-Schmidtsche Kriterium. Bei Randwertaufgaben ist die in der Funktionalanalysis häufig verwendete Norm $\|f\|$ für eine Funktion $f(x_1, \dots, x_m)$ (Wurzel aus dem über das Grundgebiet B erstrecktem Integral von $|f|^2$) für numerische Zwecke wenig geeignet. Die Güte der Fehlerabschätzung hängt sehr von der Wahl der Norm ab. Bei der Norm $\|f\| = \max |f|$ (Maximum in B) wird der Fehler in B durch eine Konstante abgeschätzt; bei $\|f\| = \max |f/Z|$, wo Z eine in B (evtl. ohne den Rand) positive Funktion ist, wird die Fehlerschranke proportional Z . Häufig erhält man mit Z als einer Eigenfunktion einer zugeordneten Eigenwertaufgabe eine besonders einfache Abschätzung; genauer fallen Abschätzungen aus, die die Greensche Funktion benutzen. Bei nichtlinearen Differentialgleichungen $L[u] = F(x_1, \dots, x_m, u)$, wobei F bezüglich u einer Lipschitzbedingung genüge und $L[u]$ ein linearer homogener Differentialausdruck für $u(x_1, \dots, x_m)$ ist, ergeben sich unter gewissen Zusatzvoraussetzungen ebenfalls mit den obigen Normbegriffen Fehlerabschätzungen. Eine ausführlichere Darstellung soll demnächst in dieser Zeitschrift erscheinen.

Die Lösung algebraischer und transzendenter Gleichungen mit Hilfe von rekursiven Folgen

Von H. Eltermann in Braunschweig

In diesem Vortrag werden zwei Verfahren A und B wie folgt beschrieben.

Das Verfahren A

Gegeben sei eine algebraische Gleichung p -ten Grades:

$$x^p = a_1 x^{p-1} + a_2 x^{p-2} + \dots + a_p \quad (1).$$

Dieser ordne man die lineare Summengleichung:

$$x_{n+p} = a_1 x_{n+p-1} + a_2 x_{n+p-2} + \dots + a_p x_n \quad (2)$$

zu. Diese benutze man als Rekursionsformel zur Berechnung einer Folge von Zahlen: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, wobei man von p beliebigen Anfangswerten: x_1, x_2, \dots, x_p ausgehen darf.

Das Verfahren stützt sich auf den folgenden aus der Theorie der linearen Differenzengleichungen bekannten Sachverhalt:

Hat die algebraische Gl. (1) die verschiedenen Wurzeln: $\varrho_1, \varrho_2, \dots$, die man sich nach fallenden Beträgen geordnet denken kann, so gilt für x_n die Darstellung:

$$x_n = C_1 \varrho_1^n + C_2 \varrho_2^n + \dots \quad (3).$$

Hierbei sind die C_p an sich beliebige, aber durch die Anfangswerte x_1, x_2, \dots, x_p wohlbestimmte Polynome in n ; und zwar ist der Grad des Polynoms $C_p(n)$ gleich $(k-1)$, wenn ϱ_p eine k -fache Wurzel ist. Sind also speziell alle ϱ_p einfache Wurzeln, so sind die C_p Konstanten. — Das Letztere wird nun vorausgesetzt, wobei aber bemerkt wird, daß das Verfahren keineswegs an diese Voraussetzung gebunden ist. — Im allgemeinen sind die C_p sämtlich von Null verschieden. Wählt man als Anfangswerte speziell: $x_1 = x_2 = \dots = x_{p-1} = 0, x_p = 1$, so ist dieses sogar stets der Fall.

Es gibt nun verschiedene Stufen des Verfahrens A: $A_1^r, A_2^r, \dots, A_r^r, \dots$, die resp. den Voraussetzungen:

$$V_r: |\varrho_1| \geq |\varrho_2| \geq \dots \geq |\varrho_r| > |\varrho_{r+t}| \quad \text{für } t \geq 1 \quad (4)$$

entsprechen.

$$A_1) \text{ V o r.: } |\varrho_1| > |\varrho_{1+t}|.$$

Es gilt die asymptotische Darstellung: $x_n \approx C_1 \varrho_1^n$.

Daraus folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \varrho_1 \quad (5).$$

Also kann die Wurzel vom maximalen Betrag durch die Folge der Quotienten beliebig genau bestimmt werden.

$$A_2) \text{ V o r.: } |\varrho_1| \geq |\varrho_2| > |\varrho_{2+t}|.$$

Es gilt die asymptotische Darstellung: $x_n \approx C_1 \varrho_1^n + C_2 \varrho_2^n$.

Ferner gelten die asymptotischen Darstellungen:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_n & x_{n+1} \\ x_{n+1} & x_{n+2} \end{vmatrix} \approx C_1 C_2 (\varrho_2 - \varrho_1)^2 (\varrho_1 \varrho_2)^n$$

und

$$D'_n = \begin{vmatrix} x_n & x_{n+2} \\ x_{n+1} & x_{n+3} \end{vmatrix} \approx C_1 C_2 (\varrho_2 - \varrho_1)^2 (\varrho_1 \varrho_2)^n (\varrho_1 + \varrho_2). \quad (6).$$

Daraus folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_{n+1}}{D_n} = \varrho_1 \varrho_2 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D'_n}{D_n} = \varrho_1 + \varrho_2.$$

Es können also die symmetrischen Funktionen der beiden Wurzeln mit maximalem Betrage beliebig genau bestimmt werden.

$$A_r) \text{ V o r.: } |\varrho_1| \geq |\varrho_2| \geq \dots \geq |\varrho_r| > |\varrho_{r+t}|.$$

Es gilt die asymptotische Darstellung: $x_n \approx C_1 \varrho_1^n + C_2 \varrho_2^n + \dots + C_r \varrho_r^n$. Ferner gelten für entsprechende r -reihige Determinanten asymptotische Darstellungen, die es gestatten mit Hilfe passender Quotienten die symmetrischen Funktionen der maximalen r -Wurzeln beliebig genau zu bestimmen.

Zusatz: Das Verfahren ist in jeder Stufe auch dann anwendbar, wenn die in Frage kommenden Wurzeln mehrfache Wurzeln sind. Nur muß man dann jede der Wurzeln ihrer Vielfachheit entsprechend zählen. Das Verfahren A_1 ist allerdings auch dann anwendbar, wenn die Wurzel vom maximalen Betrag mehrfach ist.

Das Verfahren B.

Dieses ist in gewissem Sinne als invers zum Verfahren A zu bezeichnen. Gegeben ist eine algebraische Gleichung:

$$1 = a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (7).$$

Man ordne ihr die lineare Summengleichung:

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots \quad (8).$$

zu und benutze sie wie beim Verfahren A zur Berechnung einer Zahlenfolge: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Analog zu (3) gilt die asymptotische Darstellung:

$$x_n = C_1 \varrho_1^{-n} + C_2 \varrho_2^{-n} + \dots \quad (9).$$

Es gibt wiederum verschiedene Stufen $B_1, B_2, \dots, B_r, \dots$, die den Voraussetzungen V_r' :

$$|\varrho_1| \leq |\varrho_2| \leq \dots \leq |\varrho_r| < |\varrho_{r+t}| \text{ für } t \geq 1 \text{ entsprechen.}$$

Im übrigen wird das Verfahren B analog zu A entwickelt.

Verallgemeinerung des Verfahrens B für transzendente Gleichungen

Es gilt der folgende Satz:

Satz: Es sei $f(x) = 0$ eine Gleichung. $f(x)$ sei in einem Kreis mit dem Radius R bis auf Pole regulär und habe in diesem Kreis eine einzige Nullstelle ϱ . $f(0)$ sei von Null verschieden. Entsprechend der Taylor-Entwicklung der Funktion $f(x)$ um den Nullpunkt gilt dann die formale Gleichung:

$$1 = \sum_1^{\infty} a_\nu x^\nu \quad (10).$$

Dieser Gleichung ordne man die Summengleichung:

$$x_n = \sum_1^{\infty} a_\nu x_{n-\nu} \quad (11)$$

zu und berechne eine Zahlenfolge x_n , wobei man von endlich vielen Anfangswerten x_0, x_1, \dots ausgeht. Dann gilt für x_n die Darstellung:

$$x_n = C_1 \varrho_1^{-n} + O(R^{-n}) \quad (12).$$

Also ist dann das Verfahren B_1 anwendbar.

Dieser Satz gilt in sinngemäßer Verallgemeinerung auch bei mehreren unter Umständen mehrfachen Nullstellen im Kreis mit dem Radius R .

An dieser Verallgemeinerung des Verfahrens B ist besonders interessant, daß die Gl.(10) an den betreffenden Nullstellen durchaus keinen Sinn mehr zu haben braucht, da die Taylorreihe der Funktion $f(x)$ dort nicht mehr zu konvergieren braucht.

Verbesserung einer Iterationsfolge bei Gleichungssystemen

Von *Rudolf Ludwig* in Braunschweig

Ein Gleichungssystem, das algebraisch oder transzendent sein kann, habe als Vektorgleichung geschrieben die Form eines Iterationsverfahrens:

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{f}(\bar{x}_k) \quad (1)$$

mit den Komponenten $x_{i,k+1} = f_i(x_{1,k}, \dots, x_{n,k})$. Für die Abweichung η_k des k -ten Näherungsvektors von einem Lösungsvektor \bar{x} , $\eta_k = \bar{x}_k - \bar{x}$, lautet die nach dem ersten Glied abgebrochene Taylorentwicklung:

$$\eta_{k+1} = \bar{F}'_k(\bar{x}) \eta_k \quad (2),$$

wobei $\bar{F}'_k(\bar{x}) = (f'_{x_1}(\bar{x}), \dots, f'_{x_n}(\bar{x})) = (a_{ik})$, oder

$$\bar{x}_k - \bar{x} = \bar{F}'_k(\bar{x}) (\bar{x}_{k-1} - \bar{x}) \quad (3),$$

dabei ist in dieser Näherungsgleichung \tilde{x} durch \tilde{x} ersetzt. Zur Bestimmung des unbekannten Vektors \tilde{x} müssen außer dem Ausgangsvektor noch $(n+1)$ iterierte Vektoren bekannt sein. Die μ -te Komponente dieser Gleichung lautet:

$$x_{\mu,\lambda} - \tilde{x}_\mu = a_{\mu,1}(x_{1,\lambda-1} - \tilde{x}_1) + \dots + a_{\mu,n}(x_{n,\lambda-1} - \tilde{x}_n) \dots \dots \dots (4).$$

Faßt man nun diese μ -ten Komponenten zu einer neuen $(n+1)$ -dimensionalen Vektorgleichung zusammen durch Einführung folgender Vektoren:

$$\eta_k = \begin{pmatrix} x_{k0} \\ x_{k1} \\ \dots \\ x_{kn} \end{pmatrix}, \quad \delta_k = \begin{pmatrix} x_{k1} - x_{k0} \\ x_{k2} - x_{k1} \\ \dots \\ x_{k,n+1} - x_{k,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{k0} \\ d_{k1} \\ \dots \\ d_{kn} \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_k = \eta_k - \tilde{x}_k e \quad (5),$$

so lautet diese:

$$a_{\mu,1}\beta_1 + \dots + (a_{\mu,\mu} - 1)\beta_\mu + \dots + a_{\mu,n}\beta_n = \delta_\mu \dots \dots \dots (6).$$

Diese Vektorgleichung kann man auch auffassen als ein homogenes Gleichungssystem für die $(n+1)$ Unbekannten $a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \dots, a_{\mu,\mu} - 1, \dots, a_{\mu,n}, 1$. Damit das System (6) lösbar ist, muß die Determinante verschwinden:

$$\det(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \delta_\lambda) = 0, \quad \lambda = 1, \dots, n \dots \dots \dots (7).$$

Zur Ermittlung der Komponenten von \tilde{x} führt eine geometrische Deutung der Determinanten schnell zum Ziel:

Die n vom Ursprung ausgehenden Vektoren β_k liegen mit dem Differenzenvektor δ_λ in einer durch den Ursprung gehenden Hyperebene ε_0 . Da einerseits aber die n Vektoren β_k jeweils mit einem der n Vektoren δ_λ in ε_0 liegen, muß andererseits β_k in der durch die δ_λ ausgespannten Hyperebene ε_0 liegen. Daher gilt für $\varepsilon_0: r_0 = \lambda_1 \delta_1 + \dots + \lambda_n \delta_n$. Der Vektor β_k liegt außerdem in der durch e und η_k bestimmten zweidimensionalen Ebene $\varepsilon_k: r_k = \varrho_{k1} \eta_k + \varrho_{k2} e$. Das Schnittgebilde von ε_0 und ε_k ist aber eine Gerade, für die gelten muß $r_0 = r_k$. Dieser Vektorgleichung entsprechen aber $(n+1)$ homogene Gleichungen mit den $(n+2)$ Unbekannten $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \varrho_{k1}, \varrho_{k2}$. Daraus ergibt sich für die gesuchte Komponente \tilde{x}_k von \tilde{x} :

$$\tilde{x}_k = -\varrho_{k1}/\varrho_{k2} = -\det(\delta_1, \dots, \delta_n, e)/\det(\delta_1, \dots, \delta_n, \eta_k) \dots \dots \dots (8).$$

Durch Umformung der Determinanten ergibt sich schließlich:

$$\tilde{x}_k = x_{k,n+1} - \frac{\det(\delta_1, \dots, \delta_n, \delta_n^{(k)})}{\det(\delta_1, \dots, \delta_n, e)}, \quad \text{wobei} \quad \delta_n^{(k)} = \begin{pmatrix} d_{kn} + \dots + d_{k1} \\ d_{kn} + \dots + d_{k2} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9).$$

Wendet man (9) auf den Fall $n=1$ an, so erhält man die von Steffensen (1933)¹⁾ angegebene Formel:

$$\tilde{x} = x_2 + \frac{d_1^2}{d_0 - d_1} \dots \dots \dots (10).$$

Wie hier nicht näher erläutert werden kann, entspricht der nach (9) aus r_0 hervorgegangene Vektor \tilde{x} etwa einer einmaligen Anwendung des Newtonschen Verfahrens. Weiterhin kann

x_{10}	x_{20}	x_{30}	d_{11}	d_{21}	d_{31}	1	$d_{14}+d_{13}+d_{12}$	$d_{24}+d_{23}+d_{22}$	$d_{34}+d_{33}+d_{32}$	c_{11}	b_{21}	b_{31}	b_{41}	$b_{41}^{(1)}$	$b_{41}^{(2)}$	$b_{41}^{(3)}$
x_{11}	x_{21}	x_{31}	d_{12}	d_{22}	d_{32}	1	$d_{14}+d_{13}$	$d_{24}+d_{23}$	$d_{34}+d_{33}$	c_{12}	c_{22}	b_{32}	b_{42}	$b_{42}^{(1)}$	$b_{42}^{(2)}$	$b_{42}^{(3)}$
x_{12}	x_{22}	x_{32}	d_{13}	d_{23}	d_{33}	1	d_{14}	d_{24}	d_{34}	c_{13}	c_{23}	c_{33}	b_{43}	$b_{43}^{(1)}$	$b_{43}^{(2)}$	$b_{43}^{(3)}$
x_{13}	x_{23}	x_{33}	d_{14}	d_{24}	d_{34}	1	0	0	0	c_{14}	c_{24}	c_{34}	c_{44}	$c_{44}^{(1)}$	$c_{44}^{(2)}$	$c_{44}^{(3)}$
x_{14}	x_{24}	x_{34}	$-\delta_1$	$-\delta_2$	$-\delta_3$	-4	$-\delta_4^{(1)}$	$-\delta_4^{(2)}$	$-\delta_4^{(3)}$	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	$\sigma_4^{(1)}$	$\sigma_4^{(2)}$	$\sigma_4^{(3)}$
														ε_1	ε_2	ε_3

Erklärungen:

$$\begin{aligned} d_{i,k} &= x_{i,k} - x_{i,k-1}, \\ b_{i,k} &= -(d_{i,k} + c_{1,k} b_{i,1} + \dots + c_{k-1,k} b_{i,k-1}) : c_{k,k}, \\ c_{i,k} &= d_{i,k} + c_{1,k} b_{i,1} + \dots + c_{i-1,k} b_{i,i-1}, \\ c_{1,k} &= d_{1,k}, \quad b_{i1} = -\frac{d_{i,1}}{d_{11}}, \quad \varepsilon_k = -\frac{c_{44}^{(k)}}{c_{44}}, \quad \tilde{x}_k = x_{k4} + \varepsilon_k. \end{aligned}$$

¹⁾ Fr. A. Willers, Methoden der praktischen Analysis. 2. Aufl. (1950), § 27,7. S. 258.

man nun \tilde{x} als Ausgangsvektor einer neuen Iterationsfolge wählen und dazu den verbesserten Vektor \tilde{x} berechnen. Der Vorteil dieser Methode ist, daß man den verbesserten Vektor nur durch elementare Rechenoperationen erhält ohne Berechnung neuer Funktionswerte oder Ableitungen. Das Ausgangsverfahren kann unter Umständen sogar divergent sein und doch ist die Folge x_0, \tilde{x}, \dots konvergent.

Die Determinanten von (9) unterscheiden sich nur in der letzten Spalte; ihre Ausrechnung ist am einfachsten nach dem Matrizenverfahren von Z u r m ü h l ²⁾. Die Tabelle auf Seite 233 enthält das Rechenchema mit gewissen Summenkontrollen für 3 Unbekannte, das sich ohne weiteres auf beliebig viele Unbekannte erweitern läßt.

Bericht über ein in Bearbeitung befindliches Tabellenwerk für elliptische und verwandte Funktionen

Von M. Schuler in Göttingen und H. Gebelein in Landshut

Entsprechend der großen und stets wachsenden Bedeutung der elliptischen Funktionen und solcher, die sich darauf zurückführen lassen, gibt es für sie bereits eine erhebliche Menge von Tabellenwerken (zusammengestellt in dem umfassenden Bericht von Alan Fletcher, „Guide to Tables of Elliptic Functions“ in „Mathematical Tables and other Aids to Computation“ Bd. III, 1948). Es handelt sich dabei stets um die Wiedergabe von Funktionen zweier Veränderlicher, so daß man sich auf ziemlich weite Intervallschritte beschränken muß, um den Umfang in erträglichen Grenzen zu halten. Diese beiden Veränderlichen sind die Amplitudengröße Φ und der Modul θ der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, oder sie hängen eng damit zusammen wie z. B. die Größen $k = \sin \theta$ und $k^2 = \sin^2 \theta$, die ebenfalls häufig verwendet werden. Alle diese letzten Endes auf Legendre fußenden Tabellen sind insofern unrationell, als die nahezu trivialen Ergebnisse für mäßig große θ einen unverhältnismäßig breiten Raum einnehmen, die Umgebung der entscheidenden Singularität $\theta = 90^\circ$ aber zu kurz kommt, indem dort die Differenzen außerordentlich groß werden und Zwischenwerte nur durch sehr mühsame Interpolation einigermaßen genau erhalten werden können.

Der Praktiker aber braucht Tafeln, mit denen durch lineare oder allenfalls quadratische Interpolation bereits eine gleichmäßige und hohe Genauigkeit erzielt werden kann. Um dieser Forderung zu genügen, wird bei dem neuen Tabellenwerk ein anderer Weg beschritten, der enger an die Theorie von Jacobi anknüpft und bei dem an Stelle des Legendreschen Moduls θ von dem Jacobi'schen Parameter q Gebrauch gemacht wird. Tabuliert werden in erster Linie die beiden von den Thetafunktionen hergeleiteten Hsifunktionen

$$G(q^4, z) = -\frac{\vartheta_1(x) - 2q^{1/4} \sin x}{2q^{9/4} \sin x} \quad \text{und} \quad H(q^3, z) = \frac{\vartheta_3(x) - 1}{q}$$

mit $z = \cos 2x$ für die Bereiche $z = -1(0,05) + 1$ (d. h. von $z = -1$ bis $z = +1$ mit Intervallschritten $z = 0,05$) und $q^4 = 0(0,001) 0,100$ bzw. $q^3 = 0(0,002) 0,174$. Außerdem sind Tafeln für die Logarithmen der Jacobi'schen Funktionen, nämlich für

$$\lg \operatorname{dn} u, \lg \frac{\operatorname{sn} u}{\sin x} \quad \text{und} \quad \lg \frac{\operatorname{cn} u}{\cos x} \quad \text{mit} \quad z = \cos 2x = \cos \frac{\pi u}{K}$$

für $z = -1(0,05) + 1$ und $q = 0(0,01) 0,56$ in Bearbeitung. Der Bereich des Moduls erstreckt sich auf diese Weise bis $\theta = 89^\circ 56'$. Diese Funktionen sind dadurch gekennzeichnet, daß sie sich, obwohl sie transzendent sind, in den interessierenden Bereichen durchweg beinahe linear oder quadratisch verhalten. Dies wird dadurch erzielt, daß in Bereichen mit geringer Veränderung der Funktionswerte die Tabellenwerte locker verteilt sind, während ihre Verteilung bei Annäherung an die Singularität $\theta = 90^\circ$ immer dichter wird. Bei diesen Tafeln genügt für beide Veränderliche überall lineare oder quadratische Interpolation, um Zwischenwerte mit voller Genauigkeit zu erhalten.

Um diese neuen Tabellen gut anwenden zu können, ist es unbedingt erforderlich, den Zusammenhang zwischen dem Parameter q und dem Modul θ bequem numerisch zu beherrschen. Auch dies geschieht durch Tabulierung eines fast linearen Zusammenhangs, den man gewinnt, wenn man $\lg(1 - q)$ über $-\lg \cos \theta$ als unabhängiger Veränderlicher aufträgt. Diese Variable $-\log \cos \theta$ ist überdies auch geeignet, die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, K und E besser wiederzugeben, als dies in Abhängigkeit von θ geschieht, wovon erst Kaplan Gebrauch gemacht hat. Daher wird vorgeschlagen, zur Vervollständigung des Ta-

²⁾ R. Z u r m ü h l, Matrizen (1950), S. 251–257.

bellenwerks auch noch die Größen K und K/E in Abhängigkeit von $-\lg \cos \Theta$ zu tabulieren. Somit sollen dem Werk Tabellen der drei Funktionen

$$-\lg(1 - q), \quad K \text{ und } K/E \text{ für den Bereich } -\lg \cos \Theta = 0(0,01)3$$

beigefügt werden.

Man erkennt sofort, daß alles, was man bei den geläufigen Aufgaben mit elliptischen und verwandten Funktionen braucht, ebenso wie aus den Thetafunktionen auch aus den Werten dieser Tafeln auf elementare Weise erhalten werden kann. Ein weiterer Vorzug dieser neuen Tafeln besteht darin, daß wegen der Einfachheit der Differenzen auch die Ableitungen der in Rede stehenden Funktionen mit hoher Genauigkeit entnommen werden können. Bemerkenswert ist auch die Unabhängigkeit dieser neuen Tabellen vom Winkelmaß, in welchem der Modul und das Argument angegeben sind, da nur trigonometrische Funktionen dieser Winkel vorkommen. Die Genauigkeit dieser Tafeln wird 7–10 Dezimalen betragen, und daher werden sie sich voll ausnützen lassen, wenn man sie zusammen mit einer Logarithmentafel und trigonometrischen Tafeln derselben Genauigkeit verwendet.

Das neue Tabellenwerk ist eine rationelle Ergänzung der Logarithmentafeln, wodurch diese so erweitert werden, daß eine Rechengrundlage für elliptische und verwandte Funktionen entsteht.

Über die Fehlerabschätzung beim Extrapolationsverfahren von Adams

Von P. Matthieu in Zürich-Berlin

Das Problem der Fehlerabschätzung beim Extrapolationsverfahren von Adams wurde in letzter Zeit von zahlreichen Autoren bearbeitet. In zwei Arbeiten des Referenten, von denen die erste vor einigen Monaten in der Z. angew. Math. Mech. erschienen ist ¹⁾, während die zweite nächstens folgen wird, wird dieses Problem auf einem neuen Wege in Angriff genommen. Dieser hat den Vorteil, daß er sich im Gegensatz zu den bisherigen Methoden ohne Unterschied auf die sämtlichen Varianten des Verfahrens von Adams anwenden läßt, sowie auch auf die Integration von Gleichungen beliebig hoher Ordnung. Im übrigen läßt sich das Verfahren im Anschluß an die erfolgte Integration einer Gleichung praktisch äußerst einfach durchführen. Auch ist die Fehlerschranke eine ziemlich enge. Sie beträgt im allgemeinen etwa das Anderthalbfache des wirklichen Fehlers.

Der genannte Weg beruht im wesentlichen auf zwei Prinzipien. Das erste betrifft folgendes: Es sei z. B. ein Anfangswertproblem einer Gleichung 1. Ordnung in der Form

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \dots \dots \dots (1)$$

gegeben. Ferner seien $y^*(x)$ mit $y^*(x_0) = y_0$ eine irgendwie erhaltene Näherungslösung und $\delta(x) = y(x) - y^*(x)$ mit $\delta(x_0) = 0$ der zugehörige Fehler. Setzt man dann $y(x) = y^*(x) + \delta(x)$ in (1) ein und entwickelt nach Potenzen der kleinen Größe $\delta(x)$, so ergibt sich, wenn man nur das Glied erster Ordnung berücksichtigt, für $\delta(x)$ die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\delta' = \delta \frac{\partial f}{\partial y}(x, y^*) + f(x, y^*) - y^* \quad \delta(x_0) = 0 \dots \dots \dots (2).$$

Dabei ist noch im einzelnen zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Näherung (2) zulässig ist. Aus der „Fehlergleichung“ (2), in welcher alle Koeffizienten bekannte Funktionen sind, läßt sich dann der Fehler ausrechnen oder abschätzen. Das genau gleiche Verfahren, das im wesentlichen in einer Störungsrechnung 1. Ordnung besteht, läßt sich auch auf alle anderen Varianten des Verfahrens von Adams sowie auf Gleichungen höherer Ordnung anwenden, wobei im letzteren Falle die Fehlergleichung von höherer Ordnung wird.

Der wesentliche Koeffizient in (2) ist die „infinitesimale Funktion“ $f(x, y^*) - y^*$. Sie stellt sich als Differenz von zwei annähernd gleichen Funktionen dar und bereitet bei der Abschätzung die meisten Schwierigkeiten. Das zweite Prinzip, das hier nicht hergeleitet werden kann, zeigt nun, wie die „infinitesimale Funktion“ in ganz einfacher Weise aus dem Differenzenschema abgeleitet werden kann. Man kann also für diese Funktion mit Leichtigkeit eine Majorante bilden und diese in (2) einsetzen. Dann stellt die Lösung der so modifizierten Gleichung auch eine Majorante für den Fehler dar. Ganz entsprechende Verhältnisse gelten auch für Gleichungen höherer Ordnung. Man hat also auf diese Weise eine ebenso durchsichtige wie allgemeine Methode der Fehlerabschätzung.

Da die Fehlerschranken recht eng sind, lassen sich ferner interessante Vergleiche ziehen über die Arbeitsweise der verschiedenen Varianten. Insbesondere führt eine nähere Untersuchung zu der interessanten Tatsache, daß das Verfahren von Adams bei mittelbarer Extrapolation stets rund 13mal genauer ist, als bei unmittelbarer.

¹⁾ Matthieu, P.: Über die Fehlerabschätzung beim Extrapolationsverfahren von Adams. Z. angew. Math. Mech. 31 (1951). S. 356–370.

Eine neue Methode zur Bestimmung empirischer Abhängigkeiten

Von R. Wartmann in Darmstadt

Will man die empirische Abhängigkeit einer Größe von mehreren Variablen rechnerisch erfassen, so steht man vor der Aufgabe, durch eine von Beobachtungsdaten gegebene mehrdimensionale Punktwolke eine Ausgleichsfläche höherer Ordnung zu legen. Begnügt man sich mit einer Ausgleichsebene, so macht man für die empirische Abhängigkeit der Größe x_0 von den

Variablen x_1, \dots, x_n den linearen Ansatz $X_0 = a + \sum_{i=1}^n b_i x_i$; die b_i werden dabei in bekannter

Weise nach der Methode der kleinsten Quadrate aus n linearen Gleichungen mit n Unbekannten ermittelt. Ist dieser lineare Ansatz unbefriedigend, so kann eine Erweiterung in der Weise vorgenommen werden, daß man Quadrate x_i^2 und Produkte $x_i x_j$ usw. in den Ansatz mit hineinnimmt, jedes derartige Erweiterungsglied als eine neue selbständige Variable auffaßt und den zugehörigen b -Koeffizienten aus dem entsprechend erweiterten linearen Gleichungssystem berechnet. Der zur Aufstellung des Gleichungssystems notwendige Arbeitsaufwand, die Berechnung der Größen $Q_{ij} = S(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)$, schwillt jedoch dabei so gewaltig an, daß dieser Weg bei größerem n (etwa von 10 Variablen an) praktisch ungangbar wird. Mit der Diskriminanzmethode wird ein Weg gezeigt, wie man durch Einschalten einer Hilfsgröße trotz im wesentlichen linearer Rechnung nichtlineare Abhängigkeiten erfassen kann.

Steckt sich die gewöhnliche Korrelationsrechnung das Ziel, die Größe x_0 unmittelbar aus den Variablen x möglichst genau zu berechnen, also $S(x_0 - X_0)^2$ zu einem Minimum zu machen, so erstrebt die Diskriminanzmethode zunächst lediglich, aus den n Variablen x_i eine Kennzahl X_k zu berechnen: Man teilt den gegebenen Wertevorrat in einzelne Gruppen mit angenähert gleichem x_0 und legt die Parameter von X_k derart fest, daß für Elemente derselben Gruppe der Wert von X_k möglichst gleich ausfällt, während X_k von Gruppe zu Gruppe möglichst verschieden sein soll. Denn kann man aufgrund der Variablen x die Kennzahl X_k angeben und somit die entsprechende Gruppe, so ist dadurch mittelbar auch x_0 angenähert bekannt.

Macht man für X_k , wiederum als Einfachstes, einen linearen Ansatz: $X_k = \sum_{i=1}^n b_i x_i$, so ergeben sich die b_i aus der Bedingung, daß das Verhältnis der „Binnenklassen-Varianz“ von X_k zur „Zwischenklassen-Varianz“ ein Minimum sein soll, also

$$\frac{\partial \sum_{i,j} b_i b_j \bar{Q}_{ij}}{\partial b_i \sum_{i,j} b_i b_j \bar{Q}_{ij}} = 0 \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \bar{Q}_{ij} &= \text{Binnenklassen-Abweichungsproduktsumme} \\ \bar{Q}_{ij} &= \text{Zwischenklassen-Abweichungsproduktsumme.} \end{aligned}$$

Führt man die Differentiation aus, so ergibt sich, daß die b_i gegeben sind durch den zum kleinsten Eigenwert gehörenden Eigenvektor des symmetrischen Matrizen-Eigenwertproblems $(\bar{Q} - \lambda \bar{Q}) \bar{x} = 0$. (Alle Eigenwerte λ_p des Eigenwertproblems sind positiv.)

Trägt man nun die Gruppenmittelwerte x_0 über den Kennzahl-Gruppenmittelwerten $\bar{X}_k = \sum b_i \bar{x}_i$ in einem $X_k x_0$ -Koordinatensystem auf, so ordnen sich diese Punkte mehr oder weniger längs einer Kurve an. Man kann entweder mittels der entsprechenden Ausgleichskurve graphisch zu jedem errechneten X_k das zugehörige X_0 ablesen, oder man schließt eine eindimensionale Korrelationsrechnung $X_0 = f(X_k)$ an, wobei man sich mit dem Ansatz für f nach der Gestalt der gefundenen Mittelwertkurve richtet. Ist diese eine Gerade, so ist die Diskriminanzmethode mit der linearen Korrelationsrechnung gleichbedeutend; andernfalls aber stellt die gewonnene Ausgleichsfläche eine mehrdimensionale Zylinderfläche dar, und diese paßt sich der gegebenen Punktwolke naturgemäß weit besser an als eine Ebene. — Es sei außerdem darauf hingewiesen, daß die Gruppenvarianzen erkennen lassen, ob die Streubandbreite sich mit x_0 verändert.

Der Arbeitsaufwand ist nicht wesentlich größer als bei der linearen Korrelationsrechnung, abgesehen von der etwas schwierigeren Ermittlung der b_i , da die Anzahl der Produktsummen nicht gestiegen ist. — Eine Erweiterung des Kennzahl-Ansatzes sowie sonstige Verbesserungen sind im gleichen Maße wie bei jeder anderen Korrelationsrechnung möglich.

Ein ausführlicher Bericht über den Vortrag:

L. Cremer: Die notwendigen und hinreichenden Stabilitätskriterien bei Voraussetzung positiver Koeffizienten der charakteristischen Gleichung wird in einem der nächsten Hefte dieser Zeitschrift erscheinen.

Referate der beiden Vorträge:

Th. Kaluza jr.: Mittlere Approximation mit linear unabhängigen Funktionen.

A. Walther: Aus der Arbeit des Darmstädter Institutes für praktische Mathematik

sind nicht eingegangen.

B. Mathematik

Einige Potenzreihen mit Werten der Riemannschen Zetafunktion in den Koeffizienten

Von Otto Emersleben in Berlin

I.

Aus der Partialbruchzerlegung der ctg -Funktion erhält man für $|z| < 1$:

$$1 - \pi z \text{ctg} \pi z = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) z^{2k-1} \quad (1),$$

so daß als Koeffizienten die Werte der Riemannschen Zetafunktion positiven geradzahigen Arguments auftreten, also Werte, die sich unmittelbar aus der für $\Re(s) > 1$ — absolut — konvergenten Reihe $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ ergeben. Analytische Fortsetzung dieser Funktion über die Konvergenzabszisse hinaus ergibt $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ und daher für $|z| < 1$:

$$\pi z \text{ctg} \pi z = -2 \sum_{k=0}^{\infty} \zeta(2k) z^{2k} \quad (2).$$

Die Koeffizienten dieser Potenzreihe haben hier also dasselbe Bildungsgesetz für alle vorkommenden — geradzahigen — Potenzen von z . Bei Schreibweise mit Bernoullischen Zahlen in den Koeffizienten ²⁾ ist der Aufbau weniger einfach. Es bedarf auch der Klarstellung, welche der verschiedenen Definitionen (Zählweisen) dieser Zahlen gemeint ist.

Mitunter interessieren Sonderfälle von (2), z. B. für $z = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k}} = 0, \quad \text{also} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k}} = \frac{1}{2} \quad (2a),$$

oder für $z = \frac{1}{4}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{4^{2k}} = \frac{\pi}{8}, \quad \text{also} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{4^{2k}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2b).$$

Diese geschlossene Auswertung erspart numerische Berechnung. —

Durch Differentiation von $\pi \text{ctg} \pi z$ gemäß (2) erhält man:

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (2k-1) \zeta(2k) z^{2k-1} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\pi z}{\sin \pi z} \right)^2 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (2k-1) \zeta(2k) z^{2k} \quad (3);$$

allgemein ergibt sich durch n -fache Differentiation (n natürliche Zahl) ein geschlossener Ausdruck für

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k-1}{n} \zeta(2k) z^{2k}.$$

II.

Einige der vorstehend und nachfolgend berechneten bzw. durch geschlossene Ausdrücke dargestellten Reihen erhält man z. B. bei Berechnung der Gitterenergie von auf einer Kreislinie äquidistant verteilten Ladungen (gleichnamiger oder alternierender Ladungen) ³⁾.

¹⁾ Siehe auch P. Stäckel, Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen. Bibliotheca Mathematica 8₃ (1907–1908) S. 37–54. — L. Euler, Opera omnia (1) 14, S. 156–176, Leipzig 1925, insbesondere S. 175:

$$\frac{1}{2u^2} - \frac{\pi}{2u} \cotg \pi u = \sum_{r=1}^{\infty} S_{2r} u^{2r-2},$$

wo $S_{2r} = \zeta(2r)$ (r natürliche Zahl) bedeutet.

^{1a)} Nachträglicher Zusatz: Vergl. auch A. O. Gelfond, Differenzenrechnung (A. O. Гельфонд, Исчисление конечных разностей), Moskau und Leningrad 1952, S. 324:

$$\frac{\pi x \cos \pi x}{\sin \pi x} = 1 - 2 \sum_{p=1}^{\infty} x^{2p} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}} \right].$$

²⁾ Wie z. B. v. Mangoldt-Knopp, Einführung in die höhere Mathematik II, 9. Aufl., Nachdruck, Leipzig 1951, S. 574.

³⁾ Vgl. O. Emersleben, Das elektrostatische Selbstpotential äquidistanter Ladungen auf einer Kreislinie. Wird demnächst erscheinen.

Dort treten u. a. Reihen auf wie:

$$\sum_{k=\kappa}^{\infty} \binom{2k-1}{2\kappa-1} \frac{\bar{\zeta}(2k)}{2^{2k}} \dots \dots \dots (4?),$$

wenn

$$\bar{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-s} \dots \dots \dots (5)$$

in der Konvergenzhalbebene $\Re(s) > 0$ der rechtsstehenden Reihe definiert ist und in der Halbebene $\Re(s) \leq 0$ durch analytische Fortsetzung.

Für alle $s \neq 1$ gilt die Funktionalgleichung

$$\bar{\zeta}(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s) \dots \dots \dots (5a),$$

also

$$\bar{\zeta}(0) = (1 - 2) \zeta(0) = \frac{1}{2} \dots \dots \dots (5b).$$

Daher erhält man wiederum aus der bekannten Partialbruchzerlegung für $|z| < 1$:

$$\frac{\pi z}{\sin \pi z} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\zeta}(2k) z^{2k} \dots \dots \dots (6).$$

Hieraus ergibt sich z. B. für $z = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{\zeta}(2k)}{2^{2k}} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{also} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\zeta}(2k)}{2^{2k}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \dots \dots \dots (6a).$$

Um eine Darstellung der gesuchten Reihe (4?) zu erhalten, differenziere ich die aus (6) erhaltene Gleichung für $(\pi/\sin \pi z) (2\kappa - 1)$ mal. Es ist, wenn n eine natürliche Zahl bedeutet:

$$\frac{d^n(\pi/\sin \pi z)}{dz^n} = (-1)^n \frac{n!}{z^{n+1}} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)(2k-2) \dots (2k-n) z^{2k-n-1} \dots (4a).$$

Die Funktion $(\pi/\sin \pi z)$ hat in $z = \frac{1}{2}$ ein Minimum und ist zu $z = \frac{1}{2}$ symmetrisch. Ihre Ableitungen sind in $z = \frac{1}{2}$ sämtlich vorhanden und stetig (im Innern des Konvergenzkreises!); daher verschwinden die Ableitungen ungerader Ordnung in $z = \frac{1}{2}$. Mit $n = 2\kappa - 1$ erhält man somit aus (4a) in $z = \frac{1}{2}$:

$$0 = -\frac{1}{z^{2\kappa}} + 2 \sum_{k=\kappa}^{\infty} \binom{2k-1}{2\kappa-1} \bar{\zeta}(2k) z^{2k-2\kappa} \dots \dots \dots (4b),$$

also für alle κ :

$$\sum_{k=\kappa}^{\infty} \binom{2k-1}{2\kappa-1} \frac{\bar{\zeta}(2k)}{2^{2k}} = \frac{1}{2} \dots \dots \dots (4).$$

Neue Separationsfälle der Hamilton-Jacobi'schen Differentialgleichung

Von N. H. Forbat in Mons (Belgien)

Wir verallgemeinern die Methode von Levi-Civita⁴⁾ und gewinnen unmittelbar die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein rheonomes mechanisches System, dessen Kräfte sich von einem Potential $V(q_1 \dots q_n, t)$ herleiten, durch Separation lösbar sei,

⁴⁾ Die Entwicklung von (6) ist gleichwertig mit einer bekannten, Bernoullische Zahlen in den Koeffizienten enthaltenden Potenzreihe bei K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 4. Aufl., Berlin und Heidelberg 1947, S. 209 Gl. (b). Gl. (6) hat jedoch einen einfacheren Aufbau und läßt ohne weiteres erkennen, daß der Einheitskreis der Konvergenzkreis ist.

⁵⁾ Weitere Potenzreihen mit Werten der Riemannschen Zetafunktion — und zwar nicht notwendig ganzzahligen Arguments — finden sich auch bei O. Emersleben, Das Selbstpotential einer endlichen Reihe neutraler äquidistanter Punktpaare, Math. Nachr. 6 (1951), S. 155—170, insbesondere S. 166 und O. Emersleben, Das elektrostatische Feld einer Raumladdung, Ann. Physik (4) 82 (1927), S. 713—774, insbesondere S. 733, Gl. (23r).

⁶⁾ Levi-Civita, Mathem. Annalen 59 (1904), S. 383.

d. h. daß die entsprechende H a m i l t o n - J a c o b i s c h e Gleichung eine vollständige Lösung der Form

$$W(q_1 \cdots q_n, t) = W_0(t) + W_1(q_1) + W_2(q_2) + \cdots + W_n(q_n)$$

besitze, wobei alle W überdies von n willkürlichen Konstanten $c_1 \cdots c_n$ abhängen. Die Separabilitätsbedingungen für die Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H(p_1 \cdots p_n, q_1 \cdots q_n, t) = 0 \quad \left(p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \right)$$

sind

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial q_l} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_l} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_l} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_l} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_l} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_l} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_l} = 0, \quad (I)$$

$(k, l = 1 \cdots n; k \neq l)$

und

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial t} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial t} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, \cdots, n) \quad \dots (II)$$

die identisch in den q, p und t erfüllt sein müssen. Es kommen also zu den bereits von L e v i - C i v i t a gefundenen Bedingungen (I) noch unsere, für den rheonomen Fall charakteristische, Bedingungen (II) hinzu.

Man kann dann den S t ä c k e l s c h e n Separationsfall wie folgt verallgemeinern. Es seien

$$w_0(t), w_i(q_i), f^{(i)}(t), \varphi_j^{(i)}(q_j) \quad (i, j = 1, \cdots, n)$$

$(n+1)^2$ willkürliche Funktionen einer Veränderlichen die nur der Bedingung

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ f^{(1)} & \varphi_1^{(1)} & \cdots & \varphi_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f^{(n)} & \varphi_1^{(n)} & \cdots & \varphi_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0$$

unterworfen sind. Man bezeichne mit $L_0(=\Delta)$, $L_1 \cdots L_n$ die Minoren der Elemente der ersten Zeile in Δ . Die H a m i l t o n - J a c o b i s c h e Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n L_i \left(\frac{\partial W}{\partial q_i} \right)^2 + \frac{1}{\Delta} \sum_{i=0}^n L_i w_i = 0 \quad \dots (III)$$

ist durch Separation lösbar und

$$W = \sum_{i=1}^n \int \sqrt{\sum_{k=1}^n c_k \varphi_i^{(k)} + w_i} dq_i - \int \left(\sum_{i=1}^n c_i f^{(i)} + w_0 \right) dt$$

ist eine vollständige Lösung. Wir nennen dies den verallgemeinerten S t ä c k e l s c h e n Fall.

Im weiteren Verlauf wenden wir die Separabilitätsbedingungen (I) und (II) auf das Problem der Relativbewegung eines freien Massenpunktes im Falle eine Potentials $V(x, y, z)$ der eingepägten Kraft an. Wenn das System O_{xyz} sich bewegt, sind die Bewegungsgleichungen des Massenpunktes in bezug auf O_{xyz} wie man weiß, sehr schwer lösbar, auch dann, wenn $V(x, y, z)$ eine einfache Form hat (z. B. $V = mgz$). Nun erfordern unsere Bedingungen (I) und (II) wie man leicht nachrechnen kann, in diesem Falle, daß

- a) Die Separation möglich sein muß, wenn man das System O_{xyz} als fix betrachtet.
- b) Das System O_{xyz} nur eine Translationsbewegung ausführen darf.
- c) Die Geschwindigkeitskomponente des Ursprungs O bezüglich der x -Achse (bzw. y -Achse, z -Achse) konstant sein muß, wenn V von x (bzw. y, z) abhängt.

All diese Bedingungen sind natürlich meistens nicht erfüllt, und dies erklärt die Schwierigkeiten der Integration der relativen Bewegungsgleichungen.

Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen; ein Beitrag zum Parameterproblem

Von F. Stallmann in Gießen

Das Problem der konformen Abbildung von Kreisbogenpolygonen führt auf eine Differentialgleichung 2. Ordnung der Fuchs'schen Klasse, die wir in der folgenden Form schreiben wollen:

$$\frac{y''}{y} = -\frac{1}{4} \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1 - \delta_\nu^2}{(x - e_\nu)^2} + \frac{\left(2 - n - \delta_n^2 + \sum_{\nu=1}^{n-1} \delta_\nu^2 \right) x^{n-3} + \sum_{\kappa=0}^{n-4} b_\kappa x^\kappa}{\prod_{\nu=1}^{n-1} (x - e_\nu)} \right) \dots \dots (1).$$

Es ist bekannt, daß der Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen dieser Differentialgleichung die obere Halbebene auf ein Kreisbogenpolygon abbildet, und daß dabei die n singulären Stellen $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, \infty$ in die n Ecken des Polygons übergehen, die dort Innenwinkel der Größe $\delta_\nu \pi$ einschließen. In dieser Weise läßt sich die Abbildungsfunktion für jedes beliebige Kreisbogenpolygon gewinnen, wenn nur die — übrigens reellen — Parameter δ_ν, e_ν und b_κ entsprechend gewählt werden. Aber bei einer konkreten Abbildungsaufgabe wissen wir natürlich *a priori* nicht, welche Größe die Parameter e_ν und b_κ haben müssen, und diese Schwierigkeit ist eben als das Parameterproblem bekannt. Die Schwierigkeit ist hier deshalb auch noch besonders groß, weil man mit den üblichen numerischen Integrationsmethoden keinerlei Einblick in die Abhängigkeit der Lösungen von den Parametern erhält; man kann so nicht einmal grobe Näherungen für die Parameterwerte angeben, die sich dann etwa nach Art des von Herrn *Matthieu* angegebenen Verfahrens ¹⁾ verbessern ließen. Einen Einblick in die Abhängigkeit der Lösungen von den Parametern gestattet dagegen die Methode der asymptotischen Integration. Die Grundgedanken dieses Verfahrens sollen hier kurz angegeben werden.

Wir schreiben die Differentialgleichung in der Form

$$\frac{y''}{y} = r(x) + \varrho^2 \varphi(x) \dots \dots \dots (1a),$$

wo $\varrho^2 \varphi(x)$ mit der Größe

$$\varrho^2 \varphi(x) = -\frac{\sum_{\kappa=0}^{n-4} b_\kappa x^\kappa}{4 \prod_{\nu=1}^{n-1} (x - e_\nu)} = \varrho^2 \frac{\prod_{i=1}^{n-4} (x - c_i)}{\prod_{\nu=1}^{n-1} (x - e_\nu)}$$

identifiziert werden soll, und üben hierauf die *Liouville*-Transformation aus:

$$\xi = \int_{x_0}^x \sqrt{\varphi(x)} dx, \quad u(\xi) = \sqrt{\varphi(x)} y(x).$$

Wir erhalten dann eine Differentialgleichung der Form:

$$\frac{u''}{u} = \varrho^2 + \varphi(\xi) \dots \dots \dots (2).$$

$\varphi(\xi)$ ist überall regulär analytisch mit Ausnahme der Stellen, die den Punkten $x = e_\nu$ und $x = c_i$ entsprechen, wo es Pole 2. Ordnung besitzt. Sei ξ_λ eine solche Stelle, so kann unsere Differentialgleichung (2) in der Umgebung dieser Stelle durch eine Hilfs-Differentialgleichung der folgenden Form angenähert werden:

$$\frac{v''}{v} = \varrho^2 - \frac{1 - (2m)^2}{4(\xi - \xi_\lambda)^2} \dots \dots \dots (3).$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung lauten

$$v(\xi) = \sqrt{\xi - \xi_\lambda} Z_m(i \varrho(\xi - \xi_\lambda)),$$

wenn man unter Z_m eine beliebige Zylinderfunktion m -ter Ordnung versteht. Es läßt sich nun beweisen ²⁾, daß — unter gewissen Einschränkungen — für große $|\varrho|$ die Lösungen $u(\xi)$ von (2) und $v(\xi)$ von (3) asymptotisch einander gleich werden.

Nun ist $\xi(x)$ ein spezielles Schwarz-Christoffelsches Integral, es bildet also die obere Halbebene auf ein gewisses Geradenpolygon ab. Diese speziellen Polygone lassen sich derart in Rechtecke aufteilen, daß jedes dieser Rechtecke höchstens eine singuläre Stelle von (2) enthält. Für Lösungen $u(\xi)$ von (2) erhält man so für jedes Rechteck einheitliche und jeweils im ganzen Recht-

¹⁾ P. *Matthieu*: „Über die praktische Anwendung der Schwarz-Christoffelschen Formel“, vorgetragen auf der GaMM-Tagung in Braunschweig 1952.

²⁾ R. E. *Langer*: „On the asymptotic solution“, *Transactions Am. Math. Soc.* 33 (1931), S. 23—64.

eck gültige Abschätzungen mit Hilfe von Zylinderfunktionen, und auch die Relationen, die zwischen den in den einzelnen Rechtecken abgeschätzten Lösungen bestehen müssen, lassen sich so bestimmen. Der uns hier interessierende Quotient zweier Lösungen von (2) wird sich also in jedem Rechteck näherungsweise wie der Quotient zweier Zylinderfunktionen verhalten. Nun hat das Gebiet, auf das unser Rechteck durch den Quotienten zweier Zylinderfunktionen ab-

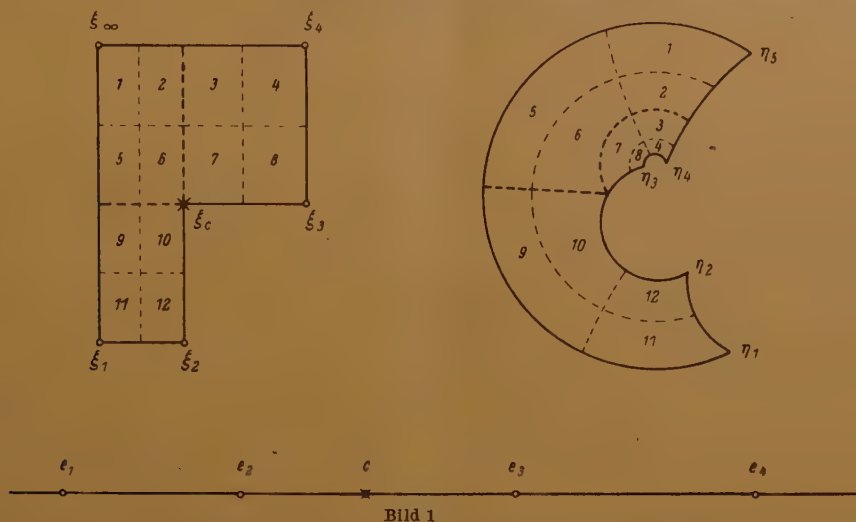


Bild 1

gebildet wird, näherungsweise die Gestalt eines Kreisbogenvierecks, wie man leicht aus dem Verlauf der Besselfunktionen im Komplexen feststellt. Das gesuchte Kreisbogenpolygon wird also in derselben Weise, wie das Geradenpolygon aus Rechtecken zusammengesetzt ist, aus Gebieten zusammengesetzt sein, die annähernd die Gestalt gewisser Kreisbogenvierecke haben. Die spezielle Gestalt dieser Kreisbogenvierecke und die Art ihrer Zusammensetzung lassen sich an Hand der Abschätzungen leicht bestimmen. Das beigelegte Bild 1 zeigt die Verhältnisse im Fall eines Kreisbogenfünfecks. (Eine ausführliche Darstellung des Verfahrens findet man bei: St all m a n n „Zum Parameterproblem der konformen Abbildung von Kreisbogenpolygonen“, Mitteilungen d. Math. Inst. d. J.-L.-Hochschule Gießen, Heft 43 (1952).)

Über die auf dem Mantel eines Kreiszylinders ausgebreiteten Potentiale der einfachen und doppelten Belegung *)

Von H. Schubert in Rostock

Nach Herleitung F o u r i e r s c h e r Integraldarstellungen für die Potentiale der auf dem Mantel eines Kreiszylinders ausgebreiteten einfachen und doppelten Belegung wird unter der Voraussetzung von Rotationssymmetrie folgendes Randwertproblem in eine F r e d h o l m s c h e Integralgleichung 2. Art übergeführt: Gesucht ist das Moment einer Doppelschicht, die nur auf einem endlichen Stück des Zylindermantels ausgebreitet ist, das von zwei zur Achse senkrechten Ebenen begrenzt wird, und ein Potential erzeugt, das bei Annäherung von innen her auf der belegten Mantelfläche stetige Randwerte annimmt.

*) Eine ausführliche Darstellung erscheint in den „Mathematischen Nachrichten“.

Ein ausführlicher Bericht über den Vortrag:

H. U n g e r: Zur Praxis der Biorthonormierung von Eigen- und Hauptvektoren wird in dieser Zeitschrift erscheinen.

Ein Bericht über den Vortrag:

J. H e i n h o l d: Zur Konstruktion involutorischer Kerne ist im Archiv der Mathematik, III (1952) S. 15—23 erschienen.

Referate der folgenden Vorträge:

H. B o d e m ü l l e r: Über aktuelle mathematische Probleme der Geodäsie,
P. M a t t h i e u: Über praktische Anwendung der Schwarz-Christoffelschen Formeln,
A. W e i g a n d: Zwei Aufgaben der angewandten Potentialtheorie
sind nicht eingegangen.

C. Mathematische Maschinen und Instrumente

Grundgedanken und Entwicklungsstand des Darmstädter Rechenautomaten

Von *H.-J. Dreyer* in Darmstadt

Im Institut für Praktische Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt sind Entwicklungsarbeiten für den Aufbau eines elektronischen Rechenautomaten im Gang. In seinen Grundgedanken folgt dieser Rechenautomat der Linie, die *H. H. Aiken* in Harvard-Computation Laboratory, Cambridge/Mass., bei seinem im wesentlichen fertiggestellten Automaten Mark IV eingeschlagen hat. So werden Rechen- und Kommandowerk weitgehend aus Netzwerken von Selen- und Germanium-Gleichrichtern und Widerständen aufgebaut; im Speicherwerk tritt neben den Haupt-Trommelspeicher auf Magnetophonprinzip ein Pufferspeicher mit magnetostatischen Spulenketten, deren Eisenkerne rechteckige Magnetisierungsschleife haben. Die Zahlenstellung ist dezimal mit 01-Verschlüsselung der Dezimalziffern in 4 Parallelkanälen vorgesehen; die Dezimalziffern werden nacheinander (serienmäßig) verarbeitet. Im Gegensatz zu Mark IV soll die Kommastellung gleitend sein, um beim Bearbeiten physikalischer und technischer Probleme langwierige Größenordnungsüberlegungen zu vermeiden. Jede Zahl z wird also in der Form $z = \pm a 10^{\pm b}$ geschrieben, davon wird $1 \leq a < 10$ mit 12 Dezimalen, also 48 Werten in 01-Verschlüsselung dargestellt, $0 \leq b \leq 63$ mit 6 Dualen, dazu kommen die beiden Vorzeichen. Für mathematische, insbesondere zahlen-theoretische Aufgaben kann bei fester Kommastellung die Stellenzahl beliebig erhöht werden.

Die bisherigen Entwicklungsarbeiten betrafen in erster Linie Speicherwerk und Rechenwerk. Für den Haupt-Trommelspeicher wurde untersucht, wie viel Rechteckimpulse sich je mm Länge auf üblichem Magnetophonband geeigneter Sorte aufbringen lassen. Im Versuchsbetrieb konnten bis zu 20 Impulse/mm ohne gegenseitige Störung aufgebracht und kurvengetreu abgenommen werden. Die Frequenzbegrenzung liegt bisher im Schreib- und Lesekopf, und zwar bei 200 kHz. Auf dem Umfang der Versuchstrommel von 40 cm Durchmesser lassen sich etwa 10 000 Doppelimpulse je Spur unterbringen. Wie eng die Impulsdichte im Speicher an diese Grenzwerte endgültig angenähert werden kann, müssen Betriebsversuche zeigen. Von beträchtlichem Einfluß ist die Sorgfalt bei der Trommelherstellung. Im Versuchsstück war die Oberfläche auf $\pm 2 \mu$ genau rund.

Die Gleichrichter-Widerstands-Netzwerke wurden bisher für das Addierwerk aufgebaut. Die Frequenzgrenze liegt bei 10 kHz. Durch bessere Typen von Selengleichrichtern oder durch teilweise Verwendung von Germaniumdioden soll sie auf mindestens 25 kHz hinaufgesetzt werden. — Das Beschaffen geeigneter Spulenkerne für den Pufferspeicher war schwierig. Die Arbeitsfrequenz liegt in der gleichen Größe wie bei den Gleichrichter-Netzwerken. So ergibt sich eine Additionszeit von etwa 0,6 ms. — Zur Eingabe von Zahlen und Befehlen ist ein lichtelektrischer Lochstreifenabtaster mit elektrostatischer Antriebs- und Bremsvorrichtung für den Lochstreifen in Entwicklung.

Soweit nach dem bisherigen Stand der Arbeiten Schätzungen möglich sind, kann mit einer betriebsfähigen Laboratoriumsausführung des Rechenautomaten im Verlauf des Jahres 1953 gerechnet werden.

Eine neue Integrieranlage

Von *Th. Erismann* in Schaffhausen/Schweiz

Der Konstruktion und dem Bau der Anlage, die ich Ihnen heute beschreiben will, ging eine Reihe technischer und wirtschaftlicher Studien voraus, deren Resultate sich kurz wie folgt zusammenfassen lassen.

1. Eine mechanische Integrieranlage kann beim heutigen Stand der Technik nur dann Aussicht auf Erfolg haben, wenn sie die immanenten Vorteile der mechanischen Integration in vollem Maße ausnützt. D. h. sie muß billiger und bei der Verarbeitung empirisch ermittelter Funktionen handlicher sein als eine programmgesteuerte digitale Rechenmaschine, gleichzeitig aber die einfach und schnell arbeitenden elektrischen Integrieranlagen an Genauigkeit und Vielseitigkeit entscheidend übertreffen.

2. Der Bau großer Integrieranlagen von 10 Integratoren aufwärts dürfte auch in Zukunft den Ausnahmefall darstellen, da der europäische Bedarf an solchen Anlagen naturgemäß beschränkt ist. Die ins Auge gefaßte Ausführung wurde also von Anfang an derart entworfen, daß

sie auch als kleine Anlage mit einem Minimum an Aufwand rationell betrieben werden kann. Allerdings wurden als Parallelentwicklung auch Projekte für Großanlagen bis ins Detail ausgearbeitet, wobei vor allem der schwierigen Verkopplungsfrage sowie einem möglichst geringen Raumbedarf besondere Aufmerksamkeit gewidmet wurde.

Auf Grund dieser Überlegungen wurde die Konstruktion aller Elemente in einheitlicher Weise nach einem Baukastensystem ausgerichtet, wobei die vollständig neue Entwicklung aller Einzelteile eine gute Abstimmung ihrer gegenseitigen Eigenschaften ermöglichte.

Im Interesse der Vereinfachung wurde versucht, möglichst wenige, dafür aber möglichst vielseitig verwendbare Elemente zu schaffen. Bekanntlich benötigt eine Integrieranlage zur Lösung aller in Frage kommenden Aufgaben folgende Rechenelemente (Bild 1):

1. Integratoren zur Lieferung von Integralen der Form $\int y \cdot dx$.

2. Summentriebe zur Lieferung von Summen der Form $c_1 \cdot x + c_2 \cdot y$, wobei c_1 und c_2 einstellbare Koeffizienten sind (davon mindestens einer stufenlos einstellbar).

3. Funktionstische zum Eingeben bzw. zur Registrierung von Funktionen $f(x)$.

Bei der vorliegenden Anlage wurde nun der Schritt gewagt, ein Element zu konstruieren, das sowohl als Integrator wie auch als Summentrieb verwendbar sein sollte. Dieses Getriebe, das wir als Nebenschlußintegrator bezeichnen, besitzt 3 Eingänge x , y und z und einen Ausgang, der eine Funktion von der Form $c_1 \cdot \int y \cdot dx + c_2 \cdot z$ liefert. Von einem Summentrieb unterscheidet sich ein solches Getriebe funktionell einzig dadurch, daß das ursprünglich konstante Übersetzungsverhältnis c_1 nunmehr zu einem auch im Betrieb variablen Verhältnis $c_1 \cdot y$ wird. M. a. W. der Ersatz des y -Antriebes durch eine Einstell-Handkurbel verwandelt den Nebenschlußintegrator in einen Summentrieb. Die Anwendungsmöglichkeiten dieses Getriebes gehen nun aber über die einfache Summenbildung bei konstantem y , die gewöhnliche Integration bei $z = 0$ und die gelegentliche Kombination beider Rechnungen im Rahmen eines bestimmten Kopplungsplanes beträchtlich hinaus. Schließt man nämlich auch den z -Antrieb (den sogenannten Nebenschlußantrieb) an den Geber an, welcher den x -Antrieb steuert, so erhält man als Resultat $\int [c_0 \cdot y + c_2] \cdot dx$.

Nun ist c_2 durch Zahnradübersetzungen einstellbar. Es ist also möglich, bei Integration über die durch den maschinell bedingten Arbeitsbereich von y gegebenen Grenzen hinauszugehen, indem man beim Überschreiten dieser Grenzen geeignete Koeffizienten c_2 hinzufügt oder abzieht. Da die mechanisch bedingten Integrationsfehler sich natürlich nur auf den ersten Term des resultierenden Binomes erstrecken, kann durch Wahl geeigneter Verhältnisse grundsätzlich eine beliebige Erhöhung der Integrationsgenauigkeit erzielt werden. Bewegt sich der Integrand stets in der Nähe eines gewissen Mittelwertes, so erhält man diese verbesserte Genauigkeit ohne weitere Umstände. Durchläuft er aber einen wesentlichen Teil des gesamten möglichen Bereiches, so muß jeweils beim Erreichen der Grenzen für y die Übersetzung c_2 umgeschaltet werden. Damit ist die Möglichkeit gegeben, neben der üblichen Integrationsgenauigkeit von der Größenordnung 10^{-6} gelegentlich, allerdings mit einem gewissen Zeitverlust, beträchtlich genauer zu arbeiten. Im vorliegenden Falle kommen 5 verschiedene Übersetzungen von c_2 in Betracht, die sichere Genauigkeiten bis zur Größenordnung $0,20\%$ liefern.

In der konstruktiven Gestaltung weicht der Nebenschlußintegrator von den bisherigen Kugelintegratoren ebenfalls wesentlich ab (Bild 2). Es ist eine unangenehme Eigenschaft der meisten Getriebe mit Reibungsschluß, daß sie beim Übersetzungsverhältnis 0 schlechte Genauigkeit und erhöhten Verschleiß aufweisen. Beim Nebenschlußintegrator konnte man nun, da ein Differentialgetriebe ohnehin erforderlich war, den y -Bereich von vorneherein zwischen 2 positive Werte verlegen. Eine durch 0 gehende Integration ist dann bei Verwendung eines gewissen negativen c_2 möglich. Um trotzdem die Kugeldrehachse in einem genügenden Bereich schwenken zu können, wurde zwischen den Berührungspunkten der beiden koaxial angeordneten konischen Rollen für An- und Abtrieb ein größerer als der sonst übliche rechte Winkel vorgesehen. Das für den Nulldurchgang verwendete c_2 wurde derart gewählt, daß beim Übersetzungsverhältnis 0 die Kugeldrehachse in der Symmetrieebene des Systemes liegt. In dieser Stellung rollt die Kugel auf beiden Rollen ideal ab, d. h. die Tangentialebenen an die Kugel in den beiden Berührungspunkten

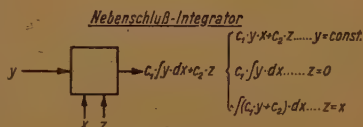
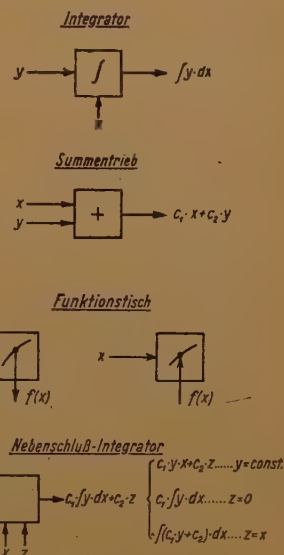


Bild 1

gehen durch den Schnittpunkt von Kugeldrehachse und Rollenachse. Die Steuerung und Anpressung der Kugel erfolgt nicht durch die üblichen getrennten Anpreß- und Steuerrollen, sondern durch ein ebenfalls konisches und koaxiales um eine vertikale Achse laufendes und ideal auf der Kugel abrollendes Rollenpaar, das von einer geeigneten Tangentenmechanik geschwenkt wird. Man kann sich leicht überlegen, daß von den 4 vorhandenen Rollen nur eine angepreßt werden muß, um das ganze System unter Spannung zubringen.

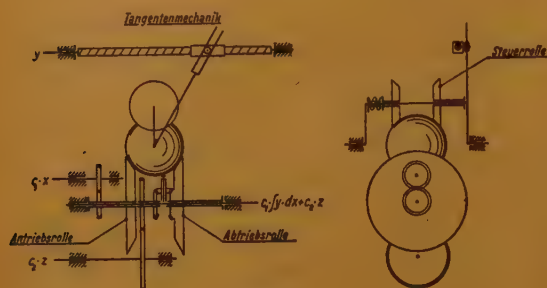


Bild 2

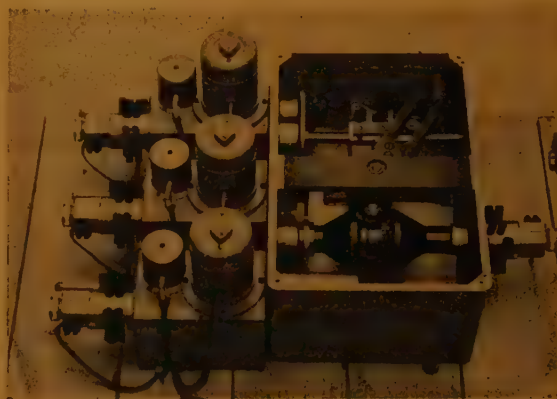


Bild 2a

Zudem hat die Anordnung noch einen weiteren Vorteil. Bekanntlich besitzt die Kugel 3 Drehungs-Freiheitsgrade. Jede auf der Kugel laufende Rolle vermindert diese Zahl um einen Grad. Die Kugeln der bisherigen Integratoren mit ihren 5 bis 6 unabhängig voneinander gelagerten Rollen waren also grundsätzlich in ihrer Bewegung überbestimmt und nur durch äußerst sorgfältige Herstellung konnte der beim erzwungenen Schlupf entstehende Verschleiß vermieden werden. Die koaxialen Rollenpaare der neuen Anordnung sind in dieser Hinsicht wesentlich leichter zu behandeln. Schließlich reguliert sich die Anpressung der beiden Arbeitsrollen automatisch beim Schwenken der Steuerrollen. Bei kleineren Übersetzungsverhältnissen wird die Abtriebsrolle, bei großen Übersetzungsverhältnissen die Antriebsrolle stärker angepreßt.

Bei der Konstruktion der Funktionstische wurde keine der bisher üblichen Methoden für die Papierbefestigung übernommen. Statt der Aufspannung auf ein Reißbrett oder auf eine Walze fiel die Wahl auf ein perforiertes Papierband beliebiger Länge, das von einer geeigneten

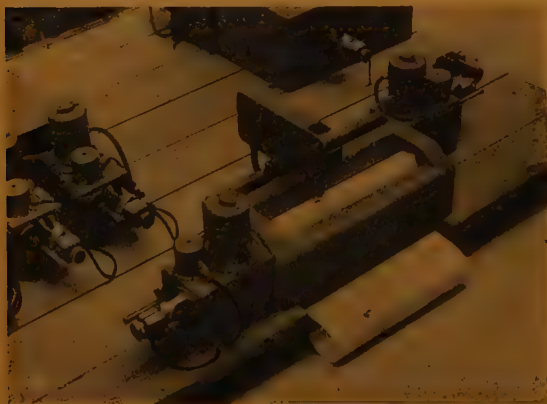


Bild 3

Walze vor- und rückwärts bewegt werden kann (Bild 3). Damit hat man es in der Hand, die auszuwertenden Diagramme stark in die Länge zu ziehen, wodurch die bekannten Fehler beim Abtasten steiler Kurven vermieden werden. Ferner ist es möglich, die ebenfalls auf perforierte Papierstreifen aufgenommenen Meßresultate verschiedener Meßinstrumente durch Abpausen oder bei entsprechender Papierbreite sogar unmittelbar zu verarbeiten. Wie bei der Nebenschlußintegration ist auch hier eine bedeutende Erhöhung der Genauigkeit dadurch möglich, daß die Diagramme nötigenfalls beim Erreichen eines der beiden Papierränder geknickt und somit große Ordinatenhöhen durch zickzackförmige Diagramme dargestellt werden können. Auch hier muß

allerdings ein Eingreifen von Hand beim Erreichen der Endlagen in Kauf genommen werden.

Die photoelektrische Abtastvorrichtung arbeitet mit moduliertem Licht, was den Tageslichteinfluß ausschaltet und eine Wechselstromverstärkung ermöglicht. Eine geeignete Wahl der Zelle und der elektronischen Elemente gestattet die Verwendung verschiedener Registrierintinten, was bei der Verwertung empirischer Meßresultate von Vorteil ist. Es besteht sogar die Möglichkeit, das Papierband aus einem Resultattisch in einen Abtasttisch zu führen und auf diese Weise gewisse Verzögerungsprobleme zu behandeln.

Für ganz kleine Anlagen ist auch eine Ausführung ohne automatische Abtastung mit Handkurbel und Fahrlupe vorgesehen.

Einen der wesentlichsten Bestandteile jeder Integrieranlage bilden die elektrischen Fernübertragungen zwischen den Rechenelementen. Auch hier wurde ein Schritt in Neuland unternommen. An Stelle der bisher üblichen S e l s y n - Systeme, die keine Drehmomentverstärkung

ergeben, sowie des induktiven oder kapazitiven Power-Selsyn, das einen beträchtlichen Aufwand an Elektronik bedingt, wurde eine äußerst einfache Schritt-Fernübertragung entwickelt. Ein kleiner kollektorartiger Geber erteilt den 7 Adern der Übertragungsleitung bei der Drehung eine Reihe rythmischer Stromimpulse. Diese werden von einem ganz ähnlich aufgebauten Empfänger derart verarbeitet, daß an seinen Ausgangsbürsten bei Gleichlauf keine Spannung, bei Vor- oder Nachlauf vorzeichenmäßig richtige Spannungen entstehen (Bild 4). Diese steuern das Feld des Servomotors, der den Geber zum Gleichlauf zwingt. Die Schrittzahl pro Umdrehung beträgt dank geeigneter Anordnung der Kollektoren 28. Der dauernd unter Strom stehende Anker des Motors wird durch einen Serienwiderstand vor übermäßiger Erhitzung bei langsamem Lauf geschützt. Die relativ kleine Reibung des Gebers, welche beispielsweise für einen Gonella-Scheibenintegrator ein unüberwindliches Hindernis wäre, wird vom Kugelgetriebe mit Leichtigkeit aufgebracht. Die Antriebe sind mit einem hydraulischen Schwingungsdämpfer zur Vermeidung von Pendelungen, einem Zahnradstufengetriebe für die Wahl geeigneter Maßstabfaktoren sowie mit je einem Zähler zu einer kompakten Einheit zusammengefaßt. Ein Geber ist in der Lage, eine beträchtliche Anzahl von Empfängern zu steuern, da nur die kleinen Feldströme geschaltet werden. Dabei werden verzweigte Kabel bzw. spezielle Zweigstellen benützt.

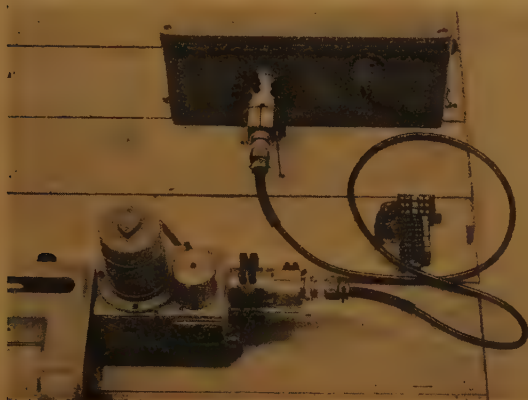


Bild 4

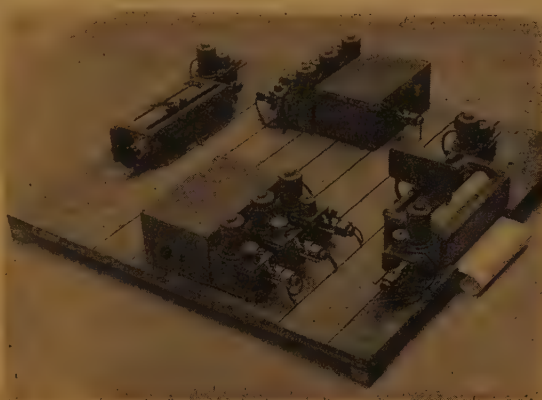


Bild 5

Dank der von Anfang an auf kleine Abmessungen gezüchteten Bauart aller Teile war es möglich, die gesamte bisher ausgeführte Versuchsanlage auf 2 Brettern von verhältnismäßig bescheidener Größe zu montieren (Bild 5). Dies gestattet eine direkte Verkopplung durch Steckschnüre von Element zu Element. Daß eine solche nur für kleine Anlagen in Frage kommt, versteht sich von selbst.

Die neuentwickelten Elemente haben sich durchwegs nach Überwindung der üblichen Kinderkrankheiten sehr gut bewährt. Über die Genauigkeit der Integratoren wurde bereits gesprochen. Die Abnützung wurde in zahlreichen Dauerversuchen zum Teil bei stark übersetzten Drehzahlen untersucht, wobei nicht die geringsten Verschleißspuren an den durch Friktion gekoppelten Teilen festgestellt werden konnten. Die Funktionstische erreichen eine Abtastgenauigkeit von wesentlich unter $\pm 0,1$ mm senkrecht zum Rand der abgetasteten Kurve. Die Fernübertragungen, die bei dieser Anlage die Grenze für die Schnelligkeit der Arbeit festlegen, gestatten bei voller Genauigkeit den üblichen Zirkeltest in weniger als 5 Minuten.

Damit darf das gesteckte Ziel als erreicht bezeichnet werden, nämlich die betriebsreife Entwicklung einer Integrieranlage, deren Leistungen zwar nur in wenigen Punkten über das bisher Erreichte hinausgehen, die aber mit einem äußerst bescheidenen Aufwand gebaut und betrieben werden kann.

Analogierechenggeräte mit linearen Potentiometern

Von A. P. Speiser in Zürich

Unter Verwendung von linearen Potentiometern (d. h. von variablen ohmschen Widerständen, deren Widerstandswert proportional einem Drehwinkel ist) und von festen ohmschen Widerständen lassen sich Rechenggeräte bauen, deren Genauigkeit je nach der Güte der verwendeten Potentiometer in der Größenordnung von 1% liegt. Die Funktionswerte werden durch Spannungen, Ströme und Drehwinkel dargestellt. Die elementaren Operationen, wie Erzeugung einer variablen Spannung, Addition, Multiplikation, Division, werden auf bekannte Art ausgeführt

(vgl. etwa W. Meyer zur Capellen, Mathematische Instrumente, 3. Auflage, S. 137). Die Ablesung der Resultate erfolgt dabei stets so, daß durch Drehen an einem Potentiometer der Ausschlag eines Messinstrumentes auf Null gebracht wird. Die Resultate werden also nicht automatisch angezeigt; es handelt sich somit um das elektrische Analogon einer „offenen Getriebekette“. Die Genauigkeit ist dabei wesentlich besser, als wenn am Meßinstrument abgelesen würde, und außerdem ist die Funktion umkehrbar (eine Schaltung, die multipliziert, kann ohne Änderung auch zum Dividieren verwendet werden).

Eine wichtige Eigenschaft der Geräte ist nun die, daß sie zur Erzeugung von analytisch gegebenen oder empirischen Funktionen verwendet werden können. Dazu kann man von folgender Tatsache Gebrauch machen: Gegeben ein elektrischer Zweipol, der beliebig viele Potentiometer, die auf einer gemeinsamen Achse sitzen, und beliebig viele ohmsche Widerstände enthält. Dann ist der zwischen den Klemmen des Zweipols gemessene Widerstand eine *rationale Funktion* des Drehwinkels der Achse. (Im gegebenen Bereich ist die Funktion nicht negativ, enthält keine Pole, und Nullstellen können nur am Rande des Bereichs vorkommen.) Der Verlauf dieser Funktion ist bestimmt durch die Konfiguration des Zweipol-Netzwerkes und durch die Widerstandswerte seiner Schaltelemente. Durch geeignete Wahl dieser Eigenschaften läßt sich eine große Klasse von gegebenen Funktionen — gleichgültig, ob diese eine einfache analytische Darstellung besitzen oder nicht — approximieren; die Darstellung ist nicht exakt, der Fehler kann aber durch Erhöhung des Aufwandes beliebig klein gemacht werden (abgesehen natürlich von der Toleranz der verwendeten Teile). Die Hauptschwierigkeit besteht darin, für die Herstellung einer gegebenen Funktion eine möglichst einfache Anordnung zu finden, und anschließend die richtigen Widerstandswerte zu ermitteln. Zu diesem Zweck sind für gewisse Fälle besondere Nomogramme erstellt worden, welche die Anpassung auf graphischem Wege ermöglichen.

Besonders nützlich erweist sich die Ausdehnung dieses Verfahrens auf Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen, da die Darstellung von solchen Beziehungen in Analogiegeräten bis jetzt noch nicht befriedigend gelöst ist. Auch hier entstehen rationale Funktionen. Die Vielfalt der verwendbaren Anordnungen ist hier sehr groß; es erweist sich als nötig, die einfachsten davon zunächst herauszusuchen und in ihrem Verhalten zu katalogisieren. Besonders nützlich ist hier die Geometrie der Gewebe, da ihre Anwendung es in vielen Fällen gestattet, eine gegebene Funktion von zwei Variablen in eine einfache Beziehung zwischen Funktionen von nur einer Variablen überzuführen.

Auf diese Weise konstruierte Rechengерäte können mit geringen Kosten kurzzeitig entworfen und gebaut werden und sind sehr robust und betriebssicher; sie benötigen nur eine einfache, nicht stabilisierte Spannungsquelle, unter Umständen sogar nur eine Trockenbatterie. Es sind ausgesprochene Einzweck-Geräte, welche nur die mathematische Aufgabe, für die sie konstruiert wurden, lösen. Bisher wurden Geräte für die Auflösung gewisser nichtlinearer Gleichungssysteme, sowie für die Auswertung von Ausdrücken mit empirischen Funktionen gebaut; weitere befinden sich in Vorbereitung.

Eine ausführlichere Beschreibung der entwickelten Verfahren wird in der „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik“ erscheinen.

Der Programmator

Von K. Zuse in Neukirchen

Moderne programmgesteuerte Rechenmaschinen werden durch Befehlsfolgen gesteuert, welche an Hand der auszurechnenden Formeln nach bestimmten Regeln gebildet werden müssen. Diese zum Teil sehr mühselige Arbeit soll durch den „Programmatör“ weitgehend erleichtert werden. Es wird zunächst ein Zusatzgerät für das programmgesteuerte Rechengерät Z 5 gebaut. Die Entwicklung fußt auf Vorarbeiten, die bereits im Jahre 1944 in Deutschland im Zusammenhang mit dem Bau des Gerätes Z 4 in Angriff genommen wurden.

Die Arbeit des Mathematikers geht bis zur expliziten Entwicklung der Formeln in Form von „Rechenplangleichungen“. Diese werden an der Tastatur des Programmators eingetastet, worauf das Gerät selbsttätig die Befehlsfolgen bildet, welche zur Durchführung der Rechnung in dem eigentlichen Rechengерät nötig sind. Die Kontrolle der Befehlsfolgen erfolgt durch Drucken auf einer Schreibmaschine. Es ist auch geplant, die Rückbildung der eingetasteten Formeln aus dem Befehlsstreifen durch den Programmator vornehmen zu lassen. Es sind ferner Einrichtungen vorgesehen, um das Ändern, Ergänzen und Umschlüsseln (Variation der Speicherzellen-Nummern) der Befehlsfolgen zu bewirken:

Das programmgesteuerte Rechenggerät Z 5

Von H. Stucken, in Neukirchen

Eine Relais-Rechenmaschine wird beschrieben, die in Weiterentwicklung der in Zürich arbeitenden Z 4 im Auftrag der Firma Leitz, Wetzlar durch die Zuse K. G. gebaut wird. Das Gerät arbeitet im Dualsystem mit gleitendem Komma. Die Rechengenauigkeit beträgt 8 Dezimalstellen. Die Rechenzeiten betragen für Addition 0,1, Multiplikation 0,4, Division und Wurzelziehen 0,75 sec. Zahlen werden über Lochstreifen oder Tastatur eingegeben, Resultate optisch angezeigt und gedruckt. Rechenbefehle für Haupt- und Unterprogramme erhält die Anlage gleichfalls über Lochstreifen. Errechnete Ergebnisse können durch „bedingte Befehle“ den Rechenablauf beeinflussen. Die Maschine ist zunächst im Speicherwerk und in der Programmfertigung noch nicht voll ausgebaut. Ein Gerät zur automatischen Programmfertigung d. h. zur automatischen Umwandlung von Rechenvorschriften in Befehlslochstreifen wird als Erweiterung entwickelt.

Ein ausführlicher Bericht über die in den Vorträgen:

H. Billig und W. Hopmann: Die Göttinger elektronischen Rechenmaschinen G 1 und G 2.

A. Schlüter: Lösung von Differentialgleichungen mit der G 1.

behandelten Göttinger Maschinen wird in einem der nächsten Hefte dieser Zeitschrift erscheinen.

Ein Referat des Vortrages:

Th. Fromme: Die Matrizen der Schaltalgebra ging nicht ein.

D. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Zur Verrechnung und Zusammenfassung von Versuchsergebnissen mit der Varianzanalyse

Von Hans Geidel in Rethmar (Hannover)

Vorgelegt seien np Meßwerte x_{jk} , die sich nach gewissen Gesichtspunkten (Versuchsperson, Versuchszeit, Wiederholungsnummer u. ä.) in das folgende Schema einordnen lassen:

$$\begin{array}{c|c} x_{11} \dots x_{1p} & Z_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{1n} \dots x_{np} & Z_n \\ \hline S_1 \dots S_p & G \end{array} \quad \begin{array}{l} Z_j = \sum_{k=1}^p x_{jk} \\ S_k = \sum_{j=1}^n x_{jk} \\ G = \sum_{j,k} x_{jk} \end{array}$$

Für dieses Schema erhält man mit der Varianzanalyse nach Abzug der Zeilen- und Spaltenstreuungen als Quadrat des mittleren Fehlers der Mittelwerte bzw. des Mittelwertes

$$m^2 = \frac{\sum_{j,k} x_{jk}^2 + \frac{G^2}{np} - \frac{\sum_{j=1}^n Z_j^2}{p} - \frac{\sum_{k=1}^p S_k^2}{n}}{n(n-1)(p-1)}$$

Es lassen sich Transformationen der Zahlen x_{jk} zur Vereinfachung der Rechenarbeit bei der Berechnung von m angeben, bei denen aber m selbst invariant bleibt. — Eine Erweiterung auf mehrfaktorielle Versuche ist möglich. —

Will man mehrere Versuche zusammenfassen, die einzeln mit der Varianzanalyse verrechnet wurden, so benötigt man nur die jeweiligen Mittelwerte und die mit der Varianzanalyse berechneten Fehler bzw. Streuungen¹⁾. Die Streuungen zwischen den einzelnen Versuchen werden berücksichtigt. — Für den Fall, daß q Versuche aus je np Meßwerten x_{jk} vorliegen, die sich ein-

¹⁾ Vgl. für $k = 1$ W. Weydanz, Z. angew. Math. Mech. 29 (1949), S. 188–190.

zeln in ein Schema aus je p Spalten und n Zeilen einordnen lassen, erhält man als Versuchsfehler bei Abzug der Spalten- und Zeilenstreuungen und der Streuungen zwischen den Versuchen

$$m^2 = \frac{n-1}{q(nq-1)} \sum_{v=1}^q m_v^2 + \frac{q-1}{nq-1} m^{*2}.$$

m_v = Fehler der Einzelversuche ($v = 1, 2, \dots, q$)

m^* = Fehler aus dem Schema der Mittelwerte der Einzelversuche.

Über eine statistische Theorie zur Beurteilung des Gütegrades von Mischungen

Von K. Stange in Karlsruhe

Es wird die Frage beantwortet, wie groß das kleinste Teilvolumen einer Mischung (welche zwei Stoffe mit gegebenem Volumen- oder Gewichtsverhältnis enthält) sein muß, damit es innerhalb gewisser zulässiger Toleranzbereiche hinsichtlich seiner Bestandteile „homogen“ ist. Wesentlich ist die Unterscheidung der Begriffe „Volumenhäufigkeit“, „Gewichtshäufigkeit“ und „Teilchenhäufigkeit“ für die einzelnen Bestandteile in der Mischung. Es wird vorausgesetzt, daß für die Teilchenhäufigkeit statistische Gesetzmäßigkeiten gelten, und gezeigt, daß die für Stichproben mit gleicher Teilchenzahl hergeleiteten Ergebnisse in erster Näherung auch für Stichproben gleichen Volumens oder gleichen Gewichts gelten, so daß der Übergang von den Teilchenhäufigkeiten zu den Volumenhäufigkeiten oder den Gewichtshäufigkeiten erlaubt ist.

Die Ergebnisse werden auf Mischungen mit drei und mehr Komponenten erweitert. — Die Arbeit erscheint voraussichtlich in ausführlicher Fassung im Ing.-Archiv.

Über asymptotische Entwicklungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung¹⁾

Von H. Lenz in München

x_1, x_2, \dots, x_n seien zufällige Größen mit den Mittelwert $\bar{x}_v = 0$, den Streuungen $\bar{x}_v^2 = \sigma$ und den Verteilungsfunktionen $F_v(x_v) = \varphi_v\left(\frac{x_v}{\sigma_v}\right)$; ferner sei $\sum_{v=1}^n \sigma_v^2 = \sigma^2 > k_1 - n$ und $|\bar{x}_v|^r < k_2$ für ein $r \geq 3$. Dann ist die charakteristische Funktion $\overline{e^{i\bar{x}t}}$ der zufälligen Größe $x = \frac{1}{\sigma} \cdot \sum_{v=1}^n x_v$, wie sich durch Taylorentwicklung (mit Integralrestglied) ergibt, bis auf Glieder der Größenordnung $n^{1-r/2}$ gleich der char. Funktion $\overline{e^{i\bar{y}t}}$ der zufälligen Größe $y = \frac{1}{\sigma} \sum_{v=1}^n y_v$; wobei die y_v zufällige Größen sind, deren Verteilungsfunktionen man aus den $\varphi_v\left(\frac{x_v}{\sigma_v}\right)$ erhält, indem man diese nach der Normalverteilung $\Phi\left(\frac{x_v}{\sigma_v}\right)$ und ihren Ableitungen entwickelt und nach dem r -ten Glied abbricht. Man erhält so die Formel

$$\overline{e^{i\bar{x}t}} = e^{-t^2/2} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\overline{He_m(y)}}{m!} (it)^m + O(n^{1-r/2}) \cdot |t|^r$$

mit

$$\frac{\overline{He_m(y)}}{m!} \sigma^m = \sum_{\substack{\mu_1 + \dots + \mu_n = m \\ \mu_v \leq r}} \frac{\sigma_1^{\mu_1} \dots \sigma_n^{\mu_n}}{\mu_1! \dots \mu_n!} \overline{He_{\mu_1}\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)} \dots \overline{He_{\mu_n}\left(\frac{x_n}{\sigma_n}\right)}$$

oder wegen $\overline{He_0\left(\frac{x_v}{\sigma_v}\right)} = 1$, $\overline{He_1\left(\frac{x_v}{\sigma_v}\right)} = \overline{He_2\left(\frac{x_v}{\sigma_v}\right)} = 0$:

$$\frac{\overline{He_m(y)}}{m!} \sigma^m = \sum_{k=1}^{[m/3]} \sum_{\substack{\lambda_1 + \dots + \lambda_k = m \\ \lambda_h \leq \lambda_j \text{ für } h < j \\ 3 \leq \lambda_p < r}} \sum_{v_1, \dots, v_k} \frac{\sigma_{v_1}^{\lambda_1} \dots \sigma_{v_k}^{\lambda_k}}{\lambda_1! \dots \lambda_k!} \overline{He_{\lambda_1}\left(\frac{x_{v_1}}{\sigma_{v_1}}\right)} \dots \overline{He_{\lambda_k}\left(\frac{x_{v_k}}{\sigma_{v_k}}\right)}.$$

¹⁾ Ein ausführlicheres Manuskript wurde der Redaktion der Mathematischen Annalen eingereicht.

Aus dieser Formel gewinnt man leicht die Abschätzung

$$\left| \frac{He_m(y)}{m!} \right| \leq k_3^m \cdot n^{[m/3] - m/2}$$

und daraus asymptotische Entwicklungen für e^{ix} und (nach Cramér) für $F(x)$. Wenn die char. Funktionen e^{ix} der x , im Unendlichen mindestens wie $t^{-\delta}$ mit $\delta > 0$ gegen Null streben, kann man ohne Verwendung der tiefergreifenden Methoden von Cramér und Hsu mit Hilfe des Fourierschen Umkehrtheorems asymptotische Entwicklungen für $F(x)$ und ihre dann existierenden Ableitungen gewinnen, nämlich

$$\left(\frac{d}{dx} \right)^p F(x) = \frac{(-1)^{p-1}}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \cdot \sum_{m=0}^{3p-9} \frac{He_m(y)}{m!} He_{m+p-1}(x) + O(n^{\varepsilon+1-r/2})$$

mit beliebig kleinem $\varepsilon > 0$.

Moderne Forschungsfragen der Versicherungsmathematik

Von Günther Wünsche in München

Die auf der Jahrestagung der GaMM über das vorbezeichnete Thema gemachten Ausführungen berührten unter ausdrücklicher Betonung des Einflusses der neuesten Entwicklungstendenzen in der mathematischen Statistik auf die Behandlung versicherungsmathematischer Problemstellungen im wesentlichen die folgenden Gebiete und Forschungsbereiche:

I. Einleitung: Neue Forschungen im Bereich der Versicherungsmathematik als Folge der Fortentwicklung mathematisch-statistischer Denkformen und Verfahrensweisen.

1. Bemerkungen über die Beschränkung auf mathematische Fragen der Personenversicherung.

2. Kurze Erörterungen des gegenwärtigen Standes der mathematisch-statistischen Fundierung und der diesbezüglichen Problematik innerhalb der Nichtlebensversicherungszweige.

II. Fragen und Untersuchungen im Problemkreis der Entwicklung einer rationellen versicherungsmathematischen Rechentechnik.

1. Methoden zur Ermittlung des Bilanzdeckungskapitals ganzer Versicherungsbestände; Hinweise auf die Schwierigkeiten des Problems und den Näherungscharakter der Verfahren.

2. Anwendungen von Stichprobenverfahren.

a) Durchführung erster Versuche, insbesondere mit Sequential-Testmethoden; Erörterung der Grundzüge der Sequential-Analysis von A. Wald.

b) Kennzeichnung der mit Hilfe von Sequential-Testverfahren zu behandelnden versicherungsmathematischen Probleme.

c) Erfordernis eines „optimalen“ Sequential-Testplanes.

3. Weitere versicherungsmathematische Fragestellungen mit ausgeprägt statistischem Charakter.

4. Das „versicherungsmathematische Genauigkeitsproblem“ als Konsequenz aus der statistischen Natur der Rechnungsgrundlagen.

a) Wahrscheinlichkeitsstreifen und Näherungsfunktionen.

b) Beispiele: Schätzung der Bilanzreserven im Zusammenhang mit der F -Methode von J e c k l i n ; Ausgleichung von Beobachtungsergebnissen zur Erstellung von Sterbetafeln.

5. Nomographische Verfahren.

III. Schluß: Zusammenfassende Hervorhebung des mathematisch-statistischen Blickpunktes bei der Behandlung versicherungsmathematischer Problemstellungen mit dem Ziele höchstmöglicher Rationalisierung der resultierenden praktischen Verfahren.

Referate der Vorträge:

H. G i e s e k u s : Die Anwendung der statistischen Prüfverfahren auf geglättete Zufallsfolgen,

U. G r a f : Die technische Statistik in der Praxis
gingen nicht ein.

E. Mechanik starrer Körper

Über Interpolation von Bewegungen

Von U. T. Bödewadt in Brunoy

Verlangt wird, von einem Punkte einer im Raum und Zeit gegebenen Bewegung einen glatten Übergang zu einer anderen im voraus festgelegten Bewegung zu finden. Bei widerstandsloser Bewegung werden Lösungen mit stückweise konstanter Beschleunigung gesucht. Für Translationsbewegungen ist die Aufgabe einfach (s. Weltraumfahrt, Frankfurt/Main, 2, 109—113 (1951)). Übertragung auf Rotationsbewegungen ist ohne weiteres möglich bei Drehungen um eine feste Achse, das heißt bei nicht unterstütztem Körper: bei Drehungen um eine stabile freie Achse. Für den allgemeinen Fall beliebiger Drehungen ist die Kenntnis der Bewegung unter dem Einfluß fester Drehkräfte erforderlich. Diese wurde für den symmetrischen Kreisel vom Verf. angegeben (Math. Zeitschr. 55 (1952), S. 310—320), steht hingegen für den unsymmetrischen Kreisel noch aus. Es bleibt dann noch ein transzendentes Gleichungssystem zu lösen, welches Dauer und Beträge der Drehbeschleunigungen festlegt.

Die Bewegungsverhältnisse im Zweistandrollengetriebe

Von K. Hain in Braunschweig

(Institut für Landtechnische Grundlagenforschung der Forschungsanstalt für Landwirtschaft, Braunschweig-Volkenrode.)

Als sechsgliedriges Zweistandgetriebe ist im Schrifttum das in Bild 1 dargestellte Getriebe mit den beiden Gestellpunkten A_0 und B_0 bekannt geworden. Mit diesem Getriebe können gegenüber dem einfachen Gelenkviereck wesentlich höhere Ansprüche, wie z. B. Rasten bei weiterlaufendem Antriebsglied, erfüllt werden. Bringt man die binären Glieder $A'D$ und AC zum Schnitt P , so entsteht ein nur für den augenblicklichen Bewegungszustand gültiges Ersatz-Gelenkviereck B_0CPA_0 ¹⁾. Ersetzt man in Bild 1 das ternäre Glied BCD durch eine Rolle und

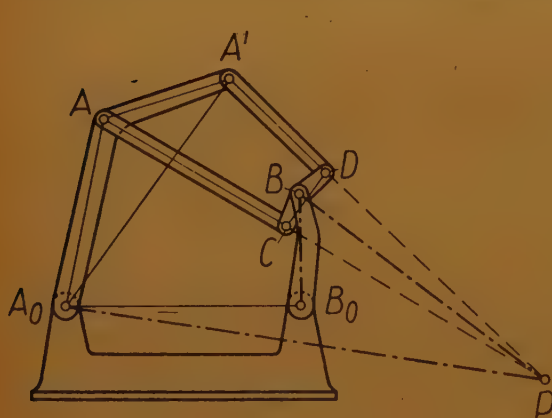


Bild 1

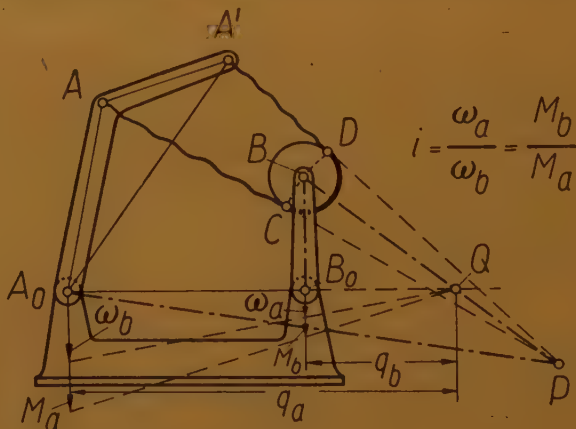


Bild 2

die binären Glieder $A'D$ und AC durch ein die Rolle umschlingendes Band, so entsteht das Zweistandrollengetriebe nach Bild 2, dessen Übersetzungsverhältnis zwischen den beiden im Gestell gelagerten Gliedern A_0AA' und B_0B durch den Relativpol Q gekennzeichnet ist als $i = q_b/q_a$, wobei der Punkt Q als Schnittpunkt der Geraden PB mit dem Gestell A_0B_0 gefunden wird. Abwandlungen des Zweistandrollengetriebes entstehen nach Bild 3 und Bild 4, wenn man an Stelle der einfachen Rolle eine Differentialrolle oder eine Kurvenscheibe anordnet.

Das Zweistandrollengetriebe ist ein periodisches Getriebe, da das Übersetzungsverhältnis zwischen An- und Abtriebsglied sich stetig verändert. Es hat gegenüber dem Gelenkgetriebe nach Bild 1 den Vorteil, daß die Herstellung der Einzelteile und der Zusammenbau des Getriebes sehr stark erleichtert werden; denn es brauchen, um einen leichteren Gang des Getriebes zu er-

¹⁾ K. Hain, Geschwindigkeitsermittlung mit Hilfe von Ersatzkurbeltrieben, Maschinenbau/Betrieb, Beilage Getriebetechnik 9 (1941), H. 4, S. 177—178.

K. Hain, Untersuchungen an sechsgliedrigen Kurbeltrieben und deren Anwendungen, Feinmechanik u. Präzision 49 (1941), H. 17/18, S. 219—223.

reichen, nicht mehr 7 Lagerbolzen der Drehgelenke genau parallel zueinander zu stehen. Diese Getriebeform kann deshalb überall dort Verwendung finden, wo der Kraftschluß durch äußere Kräfte immer so vorhanden ist, daß das Band gespannt bleibt. Bandgetriebe sind z. B. bei Zahnradfräsmaschinen und bei Waagen als sehr genau arbeitende Getriebe bekannt, so daß das

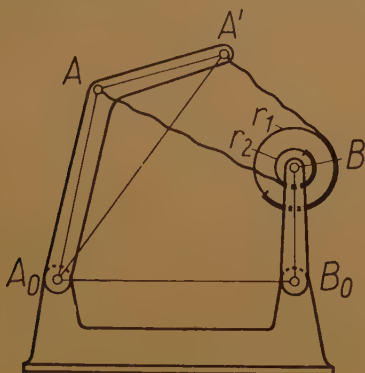


Bild 3

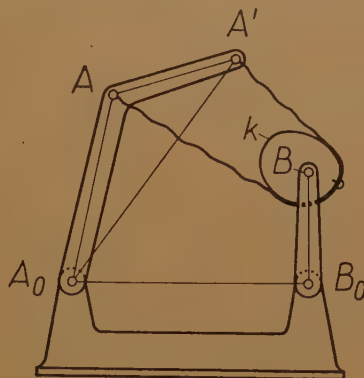


Bild 4

Zweistandrollengetriebe Billigkeit in der Herstellung mit der Genauigkeit im Betrieb verbindet. Da auch bei Gelenkgetrieben sehr oft Gegenfedern zur Beseitigung des toten Ganges in den Gelenken verwendet werden, ist es ein folgerichtiger Schritt, wenn man diese Gelenke durch ein Wälzband mit Rolle oder Kurve ersetzt.

Das Zweistandrollengetriebe kann z. B., wie im Vortrag anhand mehrerer Modelle gezeigt werden konnte, ohne weiteres als Umlauf- und Schwingrastgetriebe verwendet werden.

Einfachster synthetischer Aufbau der Schwingungsbewegung eines Massenpunktes m

Von O. Föppl in Braunschweig

1. Die zyklويدische Bewegung eines Massenpunktes, zusammengesetzt aus der Kreisbahn (Bewegung I) und der gradlinigen Bewegung $v_x = \text{const}$

Die einfachste Schwingungsbewegung eines Massenpunktes ist die Kreisbahn vom Halbmesser s , die von der Masse m mit der Frequenz ν durchlaufen wird. Die Größen m , s und ν können beliebig gewählt werden. Die abgeleiteten Größen sind:

φ ist der Winkel, den die Verbindungsgerade zwischen m und dem Kreismittelpunkt O zu den verschiedenen Zeiten T bildet. Zu einer bestimmten Zeit T ist $\varphi = \nu T$. Die Geschwindigkeit ist:

$$v = \frac{s d\varphi}{dT} = s\nu \quad \dots \dots \dots (1).$$

Die Zentralkraft Z , die senkrecht zur Bahn steht und deshalb keine Arbeit leistet, ist:

$$Z = m s \nu^2 \quad \dots \dots \dots (2)$$

und die kinetische, in der Bewegung steckende Energie E :

$$E = \frac{m v^2}{2} = \frac{m s^2 \nu^2}{2} \quad \dots \dots \dots (3).$$

Man kann nach der klassischen Dynamik die Massenbewegung auf dem Kreis $2\pi s$ zerlegen in die beiden aufeinander senkrecht stehenden Komponenten Z_x und Z_y der Kräfte Z und in die Ausschläge x und y (mit $s^2 = x^2 + y^2$) in X - und Y -Richtung, die durch die dynamische Grundgleichung miteinander verbunden sind

$$\frac{m dv}{dt} = Z = \frac{m s d\nu}{dt} \quad \dots \dots \dots (4).$$

Um die Bewegung aufrecht zu erhalten, benötigt man eine Kraft $Z = Z_0 \sin \nu T = Z_0 \sin \varphi$, die man in die Komponenten $Z_x = Z_0 \sin \nu T$ und $Z_y = Z_0 \cos \nu T$ zerlegen kann (Bewegung I).

Die Bewegung wird im Beharrungszustand unter der Voraussetzung betrachtet, daß keine Dämpfung auftritt. T ist die Umlaufdauer der Masse auf dem Kreis mit $T = \frac{2\pi}{\nu}$.

Man kann über die Bewegung I eine gradlinige Bewegung $v'_x = \text{const}$ lagern (Bewegung II), zu deren Aufrechterhaltung keine Kraft gehört. Die Bewegungen I und II können beliebig gewählt werden. Um eine zyklodische Bahn zu erhalten, wählen wir

$$v'_x = s\nu \quad \dots \quad (5).$$

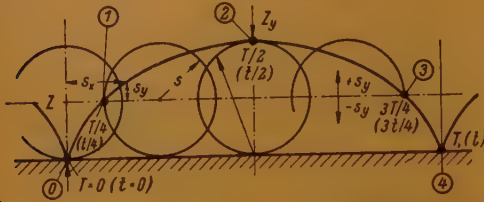


Bild 1. Zyklodische Bahn für $s\nu = v'_x$ bei der Zusammensetzung der Bewegung I der Masse m auf dem Kreis $2\pi s$ mit beliebiger Frequenz $\nu = 2\pi/T$ und der Bewegung II mit $v'_x = \text{const}$ ohne Reibung

In Bild 1 ist die zyklodische Bahn dargestellt. Die Bewegung wiederholt sich in der Zeit T , die zum Durchlaufen der Strecke 0 bis 4 benötigt wird. Zur Zeit $T/2$ hat die Geschwindigkeit ihren größten Wert $v'_x + s\nu = 2v'_x$ in X -Richtung und $v_y = 0$ in Y -Richtung. Zur Zeit $T=0$ und $T=T$ ist die Geschwindigkeit in X -Richtung null. In Y -

Richtung tritt die größte Geschwindigkeit $\pm v_y$ zu den Zeiten $T/4$ und $3T/4$ auf.

2. Die beiden Uhren

Wir können eine beliebige Erregerkraft $Z = Z_0 \sin \nu T$ voraussetzen, zu der der Zeitmaßstab $T = \frac{2\pi}{\nu}$ in Umläufen der Masse m gehört (Uhr a). Die Uhr a läuft mit konstanter Frequenz $\frac{d\varphi}{dT} = \text{const}$ um, wobei $\varphi = \varphi_0 \sin(\nu T) = \varphi_0 \sin \varphi$ ist. Die beiden Faktoren T und ν , aus denen der Wert φ unter dem Sinus gebildet ist, können unabhängig voneinander beliebig gewählt werden. Wir können z. B. T für die Betrachtung konstant setzen (Uhr a) mit dem Ergebnis, daß der Winkel φ verhältnismäßig mit der Frequenz ν anwächst.

Zur Aufstellung der dynamischen Grundgleichung

$$\frac{s m d^2 \varphi}{dT^2} = Z = \frac{s m d\nu}{dt} \quad \dots \quad (6)$$

benötigen wir noch eine 2. Uhr b , die die Uhrzeit t in sec angibt. Da die Lage des Massenpunkts m durch den Winkel φ bestimmt ist, lesen wir aus der Uhr b ebenfalls den Winkel φ ab, mit

$$Z_x = Z_{x_0} \cos \varphi = Z_{x_0} \cos(\nu t) \quad \dots \quad (7)$$

Die Beschleunigung b_x von m infolge der Kraft Z_x ist d^2x/dt^2 (gemessen in der Uhr b). Die Zeitmaßstäbe T und t sind voneinander unabhängig. Wir können aber in Gl. (7) die beiden Faktoren ν und t (ähnlich wie für $\varphi = \nu T$) beliebig wählen. Wenn wir insbesondere für t einen beliebigen konstanten Wert annehmen, wächst φ verhältnismäßig mit ν . Da wir sowohl T als auch t als konstante Werte annehmen können, können wir insbesondere in Sonderfällen $\frac{T}{t} = \text{const}$ setzen.

Das soll im nachfolgenden für 2 besonders einfache Beispiele durchgeführt werden.

3a. Die Bewegung von m in X -Richtung unter der periodischen Kraft

$$Z_x = Z_{x_0} \cos \nu T$$

Wir betrachten die Bewegung I für sich, setzen also $v'_x = 0$. Wir beschränken die Betrachtung auf die Bewegung der Masse m in X -Richtung. Zur Zeit $T=0$ hat die Kraft Z_x ihren größten Wert Z_{x_0} . Sie nimmt bis $T/4$ auf den Wert 0 ab, wird negativ, erreicht ihren größten negativen Wert $-Z_{x_0}$ zur Zeit $T/2$ oder $\varphi = \pi$. Zur Zeit $3T/4$ hat v_x den größten negativen Wert $-v_{x_0}$. Zur Zeit T ist der Ausgangszustand wieder erreicht: Mit $v_x = 0$ ist $Z = Z_{x_0}$. Es ist:

$$v_x = v_{x_0} \sin \nu T = v_{x_0} \sin \varphi \quad \dots \quad (8)$$

Die Beschleunigung ist $\frac{dv_x}{dT} \cdot \frac{d\varphi}{dT} = v_{x_0} \nu$, wobei sich $\frac{dv_x}{d\varphi}$ mit ν ändert. Der Weg x aus der Nullage ist:

$$x = x_0 \cos \nu T = x_0 \cos \varphi; \quad \frac{dx}{dT} = x_0 \nu \sin \varphi \quad \dots \quad (9)$$

Nach dem Impulssatz ist der Größtwert v_{x_0} :

$$v_{x_0} = x_0 \int_0^{T/4} \nu \sin \varphi dT = x_0 \nu_0 \quad \dots \quad (9a),$$

v_0 ist der Größtwert, den die X -Komponente der Geschwindigkeit $v \sin \varphi = s v_0 \sin \varphi$ zur Zeit $T/4$ erreicht und der gleich dem gegebenen Wert $v = v_0$ der Kreisbewegung ist. Aus Gl. (9) folgt

$$dx = x_0 (v dT) \sin (vT) = x_0 d\varphi \sin \varphi \dots \dots \dots (10).$$

Um die Vorzeichen, die bei der Differentiation auftreten, kümmern wir uns nicht. Der Richtungssinn kann in jedem Augenblick durch eine einfache Überlegung festgestellt werden.

Wir erhalten eine geradlinige Bewegung um den Koordinatenausgangspunkt O , bei der die Größtwerte Z_{x_0} und v_{x_0} um $\pi/2$ phasenversetzt sind. Als Koordinatenanfangspunkt O wählen wir für die X -Richtung die Lage von m zur Zeit $T/4$ oder für den Winkel $\varphi = \pi/2$. Der Ausschlag x der Masse m vom Nullpunkt aus folgt aus der Energiebetrachtung unter Berücksichtigung von Gl. (9) und (10)

$$E = \frac{m v_x^2}{2} = \int_0^{T/4} Z_{x_0} \cos \varphi dx = Z_{x_0} x_0 \int_0^{T/4} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = Z_{x_0} x_0 \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} \dots \dots (11),$$

$$x_0 = \frac{m v_x^2}{Z_{x_0}} = \frac{m_0^2 x_0^2 v_0^2}{Z_{x_0}}; \quad x_0 = \frac{Z_{x_0}}{m v_0^2} \dots \dots \dots (12).$$

Die Größen Z_{x_0} , m und $v = v_0$ sind gegeben.

So gut wir aber den Zeitbeginn so gelegt haben, daß Z_x nach Gl. (8) seinen größten Wert Z_{x_0} und x den größten Wert x_0 zur Zeit $T = 0$ hat, können wir auch den Zeitbeginn um $T/4$ verschieben.

3b. Die Bewegung von m unter $Z_x = Z_{x_0} \sin vT$

Die erregende Kraft Z_x wächst im Zeitintervall 0 bis $T/4$ von 0 auf den Größtwert Z_{x_0} an. Im Zeitintervall $T/4$ bis $T/2$ nimmt Z_x wieder auf den Wert 0 ab. Die größte Geschwindigkeit v_{x_0} hat m zur Zeit $T/2$. Im folgenden Zeitintervall $T/2$ bis T wird v spiegelbildlich auf den Wert 0 abgebremst. Auf einen vollen Umlauf der Uhr a , d. h. auf den Zeitintervall T erfährt m die Verschiebung $2\pi s$. Wenn man die Messung im Zeitmaßstab t durchführt, ist der zurückgelegte Weg 4 s .

Wenn wir den Bewegungsvorgang im großen und ganzen bei oftmaliger Wiederholung der periodischen Bewegung betrachten, ist es gleichgültig, in welchem Maßstab wir die Betrachtung durchführen. Die beiden Zeitmaßstäbe T und t sind nur durch einen skalaren Faktor voneinander verschieden. Für die Aufstellung der Gleichungen ist es gleichgültig, ob die Umlaufzeit T eine sec oder $1/10$ sec oder $1/n$ sec beträgt.

Wenn wir aber die Bewegung des Massenpunkts $x = x_0 \sin vt$ der Masse m in einem Teilstück betrachten, spielt der Unterschied in den Zeitangaben der Uhren a und b eine wesentliche Rolle. Es ist dT/dt zu berücksichtigen.

Wir können den Weg, der bei der zusammengesetzten Bewegung I in einer Periode zurückgelegt wird, einerseits in der Uhr a mit der Zeit T messen. Die Uhr a legt den Winkelweg 2π zurück. Die Masse m legt deshalb auf eine Periode T bzw. $2\pi/v$ die Entfernung $2\pi s$ auf der Kreisbahn zurück. Wir können aber auch den Weg, den m zurücklegt, in der Uhr b messen, weil m nach der dynamischen Grundgleichung in x Richtung beschleunigt wird und hierfür die Zeitangaben der Uhr b gültig sind. Aus der Uhr b entnehmen wir, daß sich die Periode t wiederholt, wenn der Winkel $tv = (\varphi)_0 = 2\pi$ durchlaufen ist. Aus der Beschleunigung des Massenpunkts, die aus der dynamischen Grundgleichung berechnet werden kann, folgt, daß in einer Periode $t = 2\pi/v$, d. h. nach Durcheilen des Winkels $\varphi = 2\pi$ der Weg 4 s zurückgelegt wird.

Welche Uhr hat recht, die Uhr a oder die Uhr b ? Beide Uhren machen richtige Angaben. Es folgt daraus, daß für 2 gegeneinander mit der Geschwindigkeit $v'_x = \text{const}$ bewegte Systeme die Längenmaßstäbe im Verhältnis $\pi/2$ voneinander verschieden sind, je nachdem, ob wir die Messungen im Zeitmaß T oder im Zeitmaß t durchführen.

Es gibt nur die beiden Zeitmaßstäbe, die von den Uhren a und b angegeben werden. Der eine Zeitmaßstab T folgt aus der Überlegung, daß auf eine Masse eine periodische Kraft $Z_x = Z_{x_0} \cos vT = Z_{x_0} \cos \varphi$ einwirkt, und daß wir $\varphi = vT$ aus zwei Faktoren von verschiedenen Dimensionen zusammensetzen können, von denen der eine (z. B. T) eine beliebige Funktion von x sein kann. Der andere Zeitmaßstab t folgt aus der Überlegung, daß sich eine Masse m mit konstanter Geschwindigkeit $v'_x = \text{const}$ ohne Einwirkung von Kräften gradlinig bewegt, wobei der Weg $s'_x = v'_x t$ (gemessen in der Uhr b) zurückgelegt wird. Die Uhr a und b beeinflussen sich gegenseitig nicht. Die Bewegung I hat aber zur Folge, daß die Masse eine Geschwindigkeit $v_x = f(T)$ erhält und sich mit dieser Geschwindigkeit relativ zum festen Erdboden bewegt. Die Geschwindigkeit v_x relativ zur Erdmasse m_E hängt aber nicht nur von der Komponente der Drehgeschwindigkeit sv sondern auch von $v'_x \text{const} = \frac{2\pi s'}{t}$ ab. Neben T tritt der Zeitmaßstab t auf, da die

dynamische Grundgleichung die Beziehung zwischen Weggeschwindigkeit und Beschleunigung der beiden Massen m und m_E relativ zueinander angibt. Die Einführung der beiden Zeitmaßstäbe T und t hat deshalb zur Folge, daß die Wege der beiden Massen relativ zueinander im Verhältnis $\pi/2$ stehen.

4. Zusammengesetzte Bewegung in X - und Y -Richtung

Unter 3. haben wir gesehen, daß der Zeitbeginn T wesentlich für den Verlauf der Bewegung ist. Im einen Fall (3a) erhalten wir eine Bewegung um den Nullpunkt O , wobei $v_x = f(vT) = f(\varphi)$ durch eine Cosinusfunktion dargestellt ist. Im andern Fall (3b) wird m zyklodisch um das Wegstück $2\pi s$ (Uhr a) oder um $4s$ (Uhr b) im gleichen Zeitintervall $T = t = \frac{2\pi}{v}$ fortbewegt.

Wenn wir aber die dynamische Grundgleichung (4) für die gekoppelte Bewegung in X - und Y -Richtung aufstellen, sind wir an einen bestimmten Zeitbeginn $T = 0$, den wir etwa für die Einwirkung der Kraft Z_x auf die Masse m (X -Richtung) angenommen haben, auch bei der Aufstellung der dynamischen Grundgleichung für die Y -Richtung gebunden. Für die eine Richtung ist die Beziehung zwischen Z_x und der Verschiebung x eine gradlinige Schwankung um den Nullpunkt. Für die andere Richtung (Y) liegt eine Verschiebung des Massenpunkts um $2\pi s$ vor. Das hat man bisher nicht beachtet. Die Bewegung des Massenpunkts m auf einer Kreisbahn ist eine gekoppelte Bewegung, die man nicht entkoppeln kann.

Die Bewegung der Masse m unter der Einwirkung der Kraft Z_x ist durch die Zuordnung von v_x zu jeder Stelle x angegeben. Wir erhalten eine für die Darstellung $v_x = f(x)$ zyklodische Abhängigkeit, wenn wir für diese Darstellung die Uhr a benützen und wenn wir den Zeitbeginn $T = 0$ so legen, daß $Z_x = Z_{x_0} \sin vT$ ist.

Wir können aber die Kurve $v_x = f(x)$ auch unter Berücksichtigung der Uhr b darstellen. Wenn $x = x_0 \sin vt$ ist, wird die Abhängigkeit zwischen x und φ nicht durch eine Zyklode sondern durch eine Sinuskurve wiedergegeben. Dabei bezieht sich die Kurve auf eine Gerade X , die durch den Punkt $T = 0$ hindurchgeht und deren Extremwerte $+v_{x_0}$ und $-v_{x_0}$ sind. Die Relativität des Zeitmaßstabes hat also zur Folge, daß wir die Bewegung $x = f(t)$ nach der Uhr a als Zyklode und nach der Uhr b als Sinuslinie für die Darstellung $v'_x = f'(T)$ bzw. $v'_x = f'(t)$ erhalten.

Im nachfolgenden beschreibt der Verfasser ein Anwendungsbeispiel, das zeigt, wie man mit Hilfe der vorausgehenden Betrachtungen unter Verwendung der 2 Uhren T und t eine ganz einfache Aufgabe aus der Technischen Dynamik lösen kann, die man mit den bisherigen Annahmen der klassischen Dynamik nicht auflösen konnte.

5. Aufgabe

Ein Eisenbahnwagen mit der Masse m steht auf einem ebenen geraden Gleis. An seinem Schwerpunkt greift die periodische Kraft $Z_x = Z_{x_0} \cos vT$ in Gleisrichtung an. Es soll der Größtausschlag x_0 von m unter der Voraussetzung berechnet werden, daß die Bewegung von m unter der Kraft Z_x nicht gedämpft ist.

Die Betrachtung wird mit der Uhr a durchgeführt. Unter den gegebenen Größen tritt nur der Zeitmaßstab T unmittelbar auf. Die erregende Kraft Z_x ist von T abhängig. Wir können die Berechnung zunächst im Sinne der Bewegung 3a durchführen unter der Voraussetzung, daß zu Beginn der Zeit ($T = 0$) die periodische Kraft $Z_x = Z_{x_0} \cos vT$ ihren größten Wert hat. Wir erhalten eine periodische Schwankung von x , die nach der Zeit $T/2$ um x_0 gegen den Ausgangspunkt in X -Richtung fortgeschritten ist, wenn wir den Nullpunkt $x = 0$ zur Zeit $T/4$ ansetzen. Zur Zeit $T/2$ hat die an m angreifende Kraft Z_x den negativen Größtwert $-Z_{x_0}$ mit Größtausschlag $-x_0$. Zur Zeit T ist der Ausgangswert wieder erreicht. Wenn wir zur Zeit $T/4$ oder $3T/4$ die erregende Kraft plötzlich wegnehmen, ist die Masse m in Ruhe. Der Größtausschlag x_0 der Bewegung folgt aus Gl. (12).

Mit dem gleichen Recht können wir aber auch den Zeitbeginn nach 3b um $\pi/2$ verschieben. m legt in der Zeit $T = t$ den Weg $4s$ gemessen mit dem Zeitmaßstab t zurück. Wenn wir die Zuordnung $x = f(T)$ innerhalb des Zeitintervalls T angeben wollen, müssen wir die Abhängigkeit der beiden Uhren a und b berücksichtigen.

In beiden Fällen können wir eine bekannte Geschwindigkeit $v'_x = \text{const}$ über den Bewegungsvorgang lagern und insbesondere den Vorgang 3a betrachten, wobei wir voraussetzen, daß dem Absolutbetrag nach ist:

$$sv = v'_x \quad \dots \dots \dots (13).$$

Bei der Bewegungsumkehr an den Stellen $T/4$ bzw. $3 T/4$ ist einmal die Geschwindigkeit v_x des Massenpunkts $v'_x + s v = 2 v'_x$ und das anderemal $v'_x - s v = 0$.

Nach den Regeln der klassischen Dynamik sollen die beiden Bewegungen mitsamt ihren Kräften superponiert werden können, wobei die dynamische Grundgleichung (6) erfüllt ist. Im folgenden Abschnitt wird ein Meßgerät beschrieben, mit dessen Hilfe man die Geschwindigkeit $v'_x = \text{const}$ des Fahrzeugs vom Eisenbahnwagen aus bestimmen kann, ohne die Relativgeschwindigkeit abzugreifen. Die Wagenmasse m gegenüber der Erdmasse m_E soll unendlich klein sein.

6. Das Meßgerät

In Bild 3 ist eine dünne zylindrische Scheibe a dargestellt, die mit der in der Vertikalen Z liegenden Achse Z starr verbunden ist. Durch die vertikale Anordnung der Achse wird die Gravitation ausgeschaltet. Die Achse läuft in den Lagern c_1, c_2 , die mit dem Fahrzeug (Eisenbahnwagen) starr verbunden sind. An der Achse ist das eine Ende der Feder e befestigt. Das andere Ende ist durch einen Schlitz von a geführt und trägt die Masse m , die infolge der Vorspannung Δs der Feder mit der Kraft $c \Delta s$ auf a gepreßt wird ($c = \text{Federkonstante}$).

Bei nicht umlaufender Vorrichtung ($v = 0$) wir die Auflagekraft $A = c \Delta s$ von a auf m übertragen. Man kann die Vorrichtung bei $v'_x = 0$ und beliebiger Drehfrequenz v eichen, indem man zu jeder Vorspannung Δs die Umlauffrequenz v bestimmt, bei der sich m eben von a abzuheben beginnt ($A = 0$).

Den gleichen Versuch kann man bei dem mit der Geschwindigkeit $v'_x = \text{const}$ fahrenden Fahrzeug ebenfalls bei den verschiedenen Vorspannungen Δs durchführen. Eine ausgezeichnete Frequenz v_0 liegt bei der Vorspannung Δs_0 vor, wenn $A = 0$ ist, d. h. wenn sich m gerade in den beiden Augenblicken des Durchgangs der Masse m durch die X -Achse abhebt (Bild 2). Zum ausgezeichneten Wert v_0 gehört der ausgezeichnete Wert der Vorspannung Δs_0 . Aus der Eichung des Meßinstruments bei $v'_x = 0$ kann man

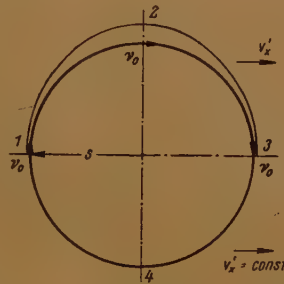


Bild 2. Abheben der Masse m (Bild 3) von der Scheibe a . (In den Punkten 1 und 3 ist die Auflagekraft $A = 0$)

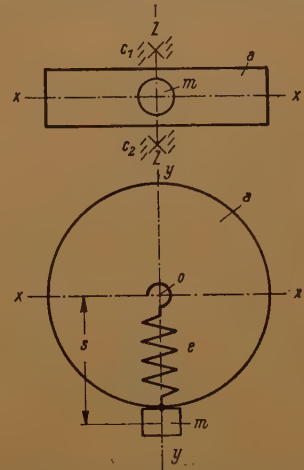


Bild 3. Meßvorrichtung zur Bestimmung der Geschwindigkeit $v'_x = \text{const}$ eines Fahrzeuges, relativ zur festen Erde. Z -Achse = Vertikale

$$v = f(K) = f(c \Delta s) \dots \dots \dots (14)$$

entnehmen, d. h. das zur ausgezeichneten Vorspannung Δs_0 gehörige v_0 bestimmen. Es folgt die Geschwindigkeit $v'_x = \text{const}$ des Fahrzeugs:

$$v'_x = \frac{c \Delta s_0}{m v_0} \dots \dots \dots (15).$$

Die Größen c, m und die beiden zusammengehörigen Werte Δs_0 und v_0 , die man auf dem Eisenbahnwagen gemessen hat, sind bekannt. Man kann also v'_x berechnen.

Referate der Vorträge:

D. Graffi: Sulle oscillazioni forzate nei sistemi nonlineari.

A. Signorini: Stereodynamische Anwendungen einer Erweiterung der Cullmannschen Ellipse.

sind nicht eingegangen.

F. Elastomechanik und Plastizität

Über die mehrdimensionalen Erweiterungen der Airyschen Spannungsfunktion

Von W. Günther in Braunschweig

Ein n -dimensionaler nichteuklidischer Raum läßt sich im allgemeinen weder auf einen n -dimensionalen euklidischen Raum abbilden (d. h.: er ist i. a. nicht konformeuklidisch), noch in einen $(n + 1)$ -dimensionalen euklidischen Raum einbetten (d. h.: er ist i. a. nicht von der Klasse eins). Beide Eigenschaften kommen allgemein nur den 2-dimensionalen Räumen zu, den gewöhnlichen Flächen. Eine solche Fläche kann stets als „Spannungsfläche“ in dem Sinne aufgefaßt werden, daß ihre Krümmungsgrößen in direkter Beziehung stehen zum Spannungstensor eines ebenen Spannungszustandes. Die Frage nach denjenigen mehrdimensionalen Spannungszuständen, die nur von einer Spannungsfunktion abhängen, führt auf die Untersuchung solcher „Spannungsräume“, die entweder konformeuklidisch oder von der Klasse eins sind. Es sind dies zwei Sonderfälle innerhalb einer allgemeinen Geometrie der Spannungsfunktionen, die sich im Anschluß an die von der Relativitätstheorie entwickelten Vorstellungen aufbauen läßt.

Eine Bemerkung zur Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper von Herrn Mettler

Von Wolfhart Haacke in Braunschweig

Die Untersuchung der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper führt Herr Mettler¹⁾ auf die Diskussion der Stabilität der Lösungen folgenden Differentialgleichungssystems zurück:

$$\omega^2 y''_{\kappa} + \omega_{\kappa}^2 y_{\kappa} + \varepsilon \cos x \sum_{m=1}^n a_{\kappa m}(\omega) y_m = 0 \quad (\kappa = 1 \dots n) \dots (1).$$

Die Stabilität wird in Abhängigkeit von dem Parameterpaar ω, ε untersucht. Es gilt $a_{\kappa \lambda} = a_{\lambda \kappa}$. Die Konstanten ω_{κ} , ihrer Bedeutung nach Eigenschwingungsfrequenzen, sind positiv, verschieden und seien der Größe nach geordnet ($\omega_{\nu} > \omega_{\nu+1}$). Herr Mettler löst dieses System durch einen Ansatz mit verallgemeinerten Fourierreihen nach Floquet, deren Koeffizienten dann formal nach dem kleinen Parameter ε entwickelt werden.

Wie an anderer Stelle gezeigt wird²⁾, ist ein Potenzreihenansatz

$$y_{\kappa \lambda} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\kappa \lambda \nu} (x, \omega) \varepsilon^{\nu} \quad (\lambda = 1 \dots n)$$

für

$$\varepsilon < E = s_0 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q^{q-1}}{q!} e^{-q(4\pi n M + 1)}$$

absolut konvergent. Dabei ist $M = \frac{\omega_1}{\Omega_1}$, $s_0 = \frac{4\omega_1^3}{\max |a_{\kappa \lambda}|}$, wenn ω in dem Intervall $0 < \Omega_1 \leq \omega \leq \Omega_2 < +\infty$ variiert. Die $y_{\kappa \lambda}$ sollen den Anfangsbedingungen

$$y_{\kappa \lambda}(0) = \delta_{\kappa \lambda}, \quad y'_{\kappa \lambda}(0) = 0 \quad (\kappa, \lambda = 1 \dots n) \dots (2)$$

genügen. Sind alle Wurzeln z_m der Stabilitätsgleichung

$$\det \{y_{\kappa \lambda}(2\pi) - z \cdot \delta_{\kappa \lambda}\} = 0 \dots (3)$$

reell, verschieden und dem Betrage nach kleiner eins, so ist (1) stabil. Die Koeffizienten der algebraischen Gleichung (3) sind absolut konvergente Potenzreihen in ε für $\varepsilon < E$. Mit $q_{\kappa} = \frac{\omega_{\kappa}}{\omega}$ ergeben sich als Koeffizienten der Potenzreihen der $y_{\kappa \lambda}$

$$c_{\kappa \lambda 0} = \delta_{\kappa \lambda} \cos q_{\kappa} x, \quad c_{\kappa \lambda \nu} = \frac{1}{\omega \omega_{\kappa}} \sum_{m=1}^n a_{\kappa m} \int_0^x \sin q_{\kappa} (\xi - x) \cos \xi c_{m \lambda, \nu-1}(\xi) d\xi \dots (4).$$

¹⁾ Mettler, E.: Allgemeine Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper. Ing. Arch. 17 (1949), S. 418–449.

²⁾ Erscheint demnächst in der „Mathematischen Zeitschrift“.

„Instabilitätsbereiche erster Art“ der ω , ε -Ebene können in Punkten $\omega = \frac{2\omega_x}{l}$ die ω -Achse berühren, „Bereiche zweiter Art“ in Punkten $\omega = \frac{|\omega_x \pm \omega_\lambda|}{l}$ ($l = 1, 2, 3, \dots$).

Im weiteren wollen wir uns auf den Fall $n = 2$ beschränken, bei dem alles Wesentliche zum Ausdruck kommt. Wenn wir (4) in (3) einsetzen und höchstens Glieder bis zu ε^2 berücksichtigen, so erhalten wir mit $d_{\mu\nu} = \frac{\omega_\mu^2 - \omega_\nu^2 - \omega^2}{(\omega_\mu^2 - \omega_\nu^2 - \omega^2)^2 - 4\omega^2\omega_\nu^2}$ folgende Stabilitätsgleichungen³⁾:

a) $q_1 \pm q_2 = l$, $q_1 = \frac{1}{2}$, $q_2 = \frac{1}{2}$:

$$z_\mu = \cos 2\pi q_\mu + \varepsilon^2 \frac{\pi \sin 2\pi q_\mu}{2\omega\omega_\mu} (a_{\mu\mu}^2 d_{\mu\mu} + a_{\mu\nu}^2 d_{\nu\mu}) + O(\varepsilon^3) \quad \mu = 1, 2, \quad \mu \neq \nu.$$

b) $q_1 \pm q_2 = l$, $q_\mu = \frac{1}{2}$:

$$z_\mu = -1 - \varepsilon^2 \frac{\pi^2 a_{\mu\mu}^2}{32\omega_\mu^4} + O(\varepsilon^3), \quad \text{die andere Wurzel wie bei a).}$$

c) $q_1 \pm q_2 = 1$, $q_2 = \frac{1}{2}$:

$$z_1 = \cos 2\pi q_1 + \varepsilon \frac{a_{12}\pi}{2\omega} \frac{\sin 2\pi q_1}{\sqrt{\omega_1\omega_2}} \sqrt{\mp 1} + O(\varepsilon^2),$$

$$z_2 = \cos 2\pi q_1 - \varepsilon \frac{a_{12}\pi}{2\omega} \frac{\sin 2\pi q_1}{\sqrt{\omega_1\omega_2}} \sqrt{\mp 1} + O(\varepsilon^2).$$

d) $q_1 = \frac{3}{2}$, $q_2 = \frac{1}{2}$:

$$z_{1,2} = -1 - \varepsilon^2 \frac{\pi^2 a_{22}^2}{64\omega_2^4} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{a_{12}^2}{a_{22}^2} \mp \sqrt{1 - \frac{4}{3} \frac{a_{12}^2}{a_{22}^2}} \right) + O(\varepsilon^3).$$

e) $q_1 = \frac{m}{2} + 1$, $q_2 = \frac{m}{2}$, $m > 1$, ganz:

$$z_\mu = (-1)^m \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{a_{12}^2 \pi^2}{\omega^2 \omega_1 \omega_2} \right) + O(\varepsilon^3).$$

f) $q_1 \pm q_2 = 2$, $q_1 = \frac{3}{2}$, $q_2 = \frac{1}{2}$:

$$z_{1,2} = \cos 2\pi q_1 + \varepsilon^2 \frac{\pi \sin 2\pi q_1}{4\omega} \left\{ \frac{a_{11}^2 d_{11} + a_{12}^2 d_{21}}{\omega_1} - \frac{a_{22}^2 d_{22} + a_{12}^2 d_{12}}{2\omega - \omega_1} \pm \sqrt{D} \right\} + O(\varepsilon^3) \text{ mit}$$

$$D = \left(\frac{a_{11}^2 d_{11} + a_{12}^2 d_{21}}{\omega_1} + \frac{a_{22}^2 d_{22} + a_{12}^2 d_{12}}{2\omega - \omega_1} \right)^2 \mp \frac{a_{12}^2}{\omega^2 \omega_1 \omega_2} \left(\frac{a_{11}}{2\omega_1 - \omega} + \frac{a_{22}}{3\omega - 2\omega_1} \right)^2. \quad ^4)$$

g) $q_1 = \frac{5}{2}$, $q_2 = \frac{1}{2}$:

$$z_1 = -1 + O(\varepsilon^3), \quad z_2 = -1 - \varepsilon^2 \frac{\pi^2 a_{22}^2}{32\omega_2^4} + O(\varepsilon^3).$$

h) $q_1 \pm q_2 = l > 2$, $q_2 = \frac{1}{2}$:

$$z_1 = \cos 2\pi q_1 + \varepsilon^2 \frac{\pi \sin 2\pi q_1}{2\omega\omega_1} (a_{11}^2 d_{11} + a_{12}^2 d_{21}) + O(\varepsilon^3),$$

$$z_2 = \cos 2\pi q_1 \mp \varepsilon^2 \frac{\pi \sin 2\pi q_1}{2\omega\omega_2} (a_{22}^2 d_{22} + a_{12}^2 d_{12}) + O(\varepsilon^3).$$

i) $q_1 \pm q_2 = l > 2$, $q_2 = \frac{1}{2}$:

$$z_1 = -1 + O(\varepsilon^3), \quad z_2 = -1 - \varepsilon^2 \frac{\pi^2 a_{22}^2}{32\omega_2^4} + O(\varepsilon^3).$$

³⁾ Es sei $q_1 > q_2$ angenommen. Der Ausnahmefall $q_2 = \left(1 - \frac{2}{l}\right) q_1$ bzw. $q_1 = \left(1 + \frac{2}{l}\right) q_2$ wird nicht behandelt.

⁴⁾ Die beiden Vorzeichen in D beziehen sich auf die verschiedenen Zeichen von $q_1 \pm q_2 = 2$.

Daraus folgern wir:

Es gilt keine Instabilitätsbereiche erster Art der Ordnung ε , der Ordnung ε^2 nur bei $\omega = 2\omega_1$ und $\omega = 2\omega_2$. Bereiche erster Art bei $\omega = \frac{2\omega_*}{l}$ für $l > 1$ sind von höherer Ordnung klein. Bereiche zweiter Art für $l = 1, 2$ treten nur bei $\omega_1 + \omega_2 = l\omega$ auf. Für $l = 1$ ergibt sich bei $a_{12} \neq 0$ (keine Entkoppelung des Systems) immer ein Bereich zweiter Art der Ordnung ε . Bei $l = 2$ erhalten wir einen Bereich zweiter Art, wenn $D < 0$ ist. Für hinreichend kleine und große a_{12}^2 ist $D > 0$. Dazwischen gibt es ein Intervall auf der a_{12}^2 -Achse, das einen Bereich zweiter Art bewirkt,

1. wenn $\frac{a_{11}}{a_{22}}$ hinreichend groß oder klein ist,
2. für alle Paare a_{11}, a_{22} genau dann, wenn $1 < q_1 < 1 + \frac{1}{4}\sqrt{10}$ gilt.

Hier erkennt man, daß auch bei den „Summenoberfrequenzen“ nicht notwendig Bereiche zweiter Art auftreten.

Ist $l > 2$, so sind die fraglichen Bereiche zweiter Art von höherer Ordnung klein. Gilt $\frac{2\omega_*}{m} = \frac{\omega_1 \pm \omega_2}{l}$ für ein Paar ganzer Zahlen m, l , fallen also Bereiche erster und zweiter Art zusammen, so treten immer Bereiche erster Art mit den ihnen typischen Eigenschaften auf.

Über die Drehfrequenzbereiche mit instabilen periodischen Torsionsschwingungen bei Kurbelwellen

Von E. Hölder in Leipzig

Zu dem Gegenstand, der in C. B. Biezeno und R. Grammel, Technische Mechanik, Kap. XII, § 9, dargestellt ist, werden begriffliche und mathematische Verschärfungen mitgeteilt, die auf zurückliegenden, von mir bei Prof. Biezeno in Braunschweig angestellten Überlegungen und Rechnungen beruhen. Vor allem wird hervorgehoben, daß Anlaß zu Frequenzbereichen mit instabilen nichtlinearen periodischen Torsionsschwingungen auch die halbganzen Werte des Periodenquotienten

$$\dot{\gamma} = \frac{\text{Frequenz } \alpha \text{ der Torsionsschwingung}}{\text{Frequenz } \nu \text{ der Umdrehung}}$$

geben (genau so wie im Verzweigungsfall die ganzzahligen γ). Die Berechnung solcher Umdrehungsfrequenzen $\nu = \frac{2\alpha}{\dot{\gamma}}$, $\dot{\gamma}$ ungerade, könnte in der Weise erfolgen, in der Grammel von der Zweitaktmaschine zur Viertaktmaschine übergeht. [Sie sind, wie Herr Grammel in der Diskussion mitteilte, zwar theoretisch bekannt, aber nie beobachtet und erwähnt worden. Ihr „Gefährlichkeitsgrad“, vgl. l. c. § 7, 32, ist offenbar verschwindend klein, wobei dieser von Grammel mit Vorbehalt eingeführte Begriff, „die Energie, welche eine durch Störung von der periodischen Schwingung abweichende Bewegung in sich hineinfrißt“, wohl noch genauer mathematisch untersucht werden sollte].

Auszugehen ist von einer exakten periodischen Lösung e^0 des vollständigen mechanischen Problems der wirklichen Maschine — zu konstruieren nach der Theorie der „Verzweigung periodischer Lösung nichtlinearer Schwingungsgleichungen“ von Iglisch, Math. Ann. Bd. 114 (1937) — insbesondere im Verzweigungsfall, den wir aber, da er tiefgreifende Modifikationen gegenüber der Betrachtung von Biezeno-Grammel erforderte, hier beiseite lassen wollen.

Die Theorie bedarf zu dieser Anwendung aber einer weiteren Ausgestaltung, indem zum Parameter $q (= e)$, mit dem die Veränderlichkeit der Massen der Kurbelgetriebe sowie die äußeren Tangentialmomente multipliziert sind, noch ein Zuwachs $p (= \lambda^{(1)})$ der Periode einzuführen ist, genauer

$$\frac{1}{(2\pi\nu)^2} = \lambda = \lambda^0 + p.$$

Zu der gewonnenen periodischen Lösung sind dann die homogenen linearen Variationsgleichungen aufzustellen, von denen multiplikative (komplexwertige) Null-Lösungen

$$\begin{array}{ll} X(\psi) & \text{mit} \quad X(2\pi) = \mu X(0) \\ Y(\psi) & Y(2\pi) = \mu Y(0), \end{array} \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi,$$

interessieren.

Diese Variationsgleichungen unterscheiden sich von der Linearisierung der Bewegungsgleichungen, die Grammel vornimmt, s. u.

Sodann werden zunächst die Stabilitätsgrenzen ermittelt durch das bei $\mu = -1$ entstehende selbstadjungierte Eigenwertproblem, den (nichtlinear eingehenden) Eigenwert p als Funktion des Störungsparameters q zu ermitteln. Nach der üblichen, auch von Biezeno-Grammel angewandten, von Rellich, Math. Ann. 113 (1936) mathematisch begründeten Theorie der Eigenwertstörung erhält man für die Nachbarschaft von $q = 0$ eine Aufspaltung des zweifachen Eigenwertes $q = 0$ in zwei Eigenwerte $p = p_i(q)$, $i = 1, 2$, aus der Determinantengleichung

$$\det \left\{ \begin{array}{l} p \int H^{(2)}(X_i, X_l) d\psi + q \int H_q^{(2)}(X_i, X_l) d\psi \\ + 3p \int H^{(3)}(X_0, X_i, X_l) d\psi + 3q \int H^{(3)}(X_*, X_i, X_l) d\psi + \dots \end{array} \right\} = 0 \quad (*)$$

$$(i, l = 1, 2),$$

wobei für die Verdrehung $\vartheta^{0*}(\psi)$ und den zugehörigen Impuls $\eta_\kappa^0(\psi)$ der periodischen Ausgangsbewegung e^0 nur kurz

$$(\vartheta^{0*}(\psi)) = p X_0(\psi) + q X_*(\psi) + \dots$$

gesetzt ist. $H^{(2)}$ sind die Glieder zweiter Dimension, $H_q^{(2)}$ diese Glieder nach q differenziert, soweit es explizit vorkommt, $H^{(3)}$ die Glieder dritter Dimension in der Hamilton-Funktion der Kurbelwelle.

Daß schließlich der die q -Achse in der Mitte enthaltende Winkelraum zwischen diesen Grenzen $p = p_i(q)$ wirklich ein Drehfrequenzbereich mit — formal und wirklich — instabilen periodischen Lösungen ist, folgt aus einer Zusatzbemerkung von mir „Über die Vielfachheiten gestörter Eigenwerte“, Math. Ann. 113 (1936), die sich eben auch funktionentheoretisch, hier in einem Vorzeichenwechsel von μ^2 längs $p = p_i(q)$ auswirken.

[Im Vortrag hatte ich voreilig von doppelt so großen Instabilitätsintervallen gesprochen (falls das Differentialgleichungssystem in der kanonischen Form angenommen wird), die überdies beim wirklichen Differentialgleichungssystem, wie (*) zeigt, auch von dem — unbekannten — nichtlinearen Zusammenhang zwischen Verdrehung und Torsionsspannung abhängen. Herr Grammel wies jedoch auf eine von ihm angeregte Untersuchung von Kóiter, Proc. Acad. Amsterdam (mir noch nicht zugänglich) hin, der das sehr bemerkenswerte und merkwürdige Ergebnis gefunden hat, daß zu Grammels ursprünglicher Rechnung zwei weitere Glieder hinzukommen, die sich gegenseitig gerade wieder wegheben. Auf Grund dieses (von mir verifizierten) Ergebnisses erweist sich die von Biezeno-Grammel berechnete Aufspaltung dennoch als exakt — wenigstens bei Zugrundelegung des linearen Hooke'schen Zusammenhanges. So lautet die dortige Formel (41, 11) (bei Hinzufügung der Drehmassen Θ_κ des glatten Ersatzsystems, die sich ja bei der inhomogenen Maschine keineswegs wegheben, sowie bei Ausrechnen der $U_\kappa(u_\kappa^0) = j^2 u_\kappa^0$ durch die Amplituden u_κ^0 der ungestörten Torsionsschwingung) unter Verwendung der Amplituden $q A_{\kappa, 2j}$, $q B_{\kappa, 2j}$ der Massenveränderlichkeit schließlich

$$\frac{p}{\lambda^0} = \pm \frac{1}{2} \frac{q}{\sum \Theta_\kappa u_\kappa^0} [(\sum \Theta_\kappa u_\kappa^0 A_{\kappa, 2j})^2 + (\sum \Theta_\kappa u_\kappa^0 B_{\kappa, 2j})^2]^{1/2} + \dots \quad \left(j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \right).$$

Der elastisch plastische Körper

Von Hans Jung in Stuttgart

Wird ein isotroper Körper durch ein Kräftesystem beansprucht, so geht der Punkt \bar{P} des Körpers mit den Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ in den Punkt P mit den Koordinaten x, y, z über. Bezeichnet man mit

$u(x, y, z)$ die Verschiebung in der x -Richtung,
 $v(x, y, z)$ die Verschiebung in der y -Richtung,
 $w(x, y, z)$ die Verschiebung in der z -Richtung,

so ist der Zusammenhang der Koordinaten gegeben durch

$$\bar{x} = x - u(x, y, z), \quad \bar{y} = y - v(x, y, z), \quad \bar{z} = z - w(x, y, z) \quad \dots \dots \dots (1).$$

Durch Spezialisierung läßt sich aus (10) das H o o k e s c h e Gesetz, das Gesetz von H. K a u - d e r e r und die klassische Plastizitätstheorie gewinnen.

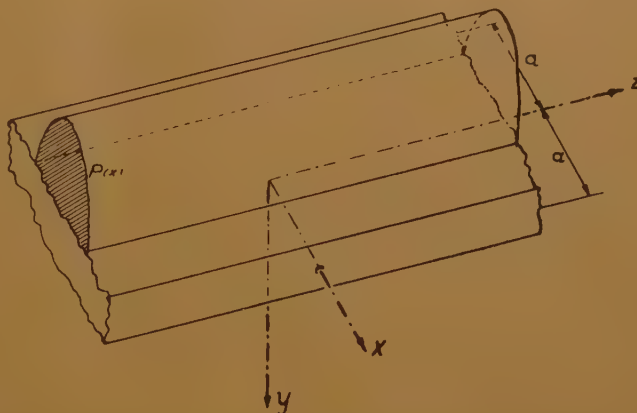
Die durch (10) gegebenen Spannungen müssen noch die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Geht man mit dem Ansatz

$$\left. \begin{aligned} u &= c_1 u_0 + c_1^2 u_1 + c_1^3 u_2 \cdots \\ v &= c_2 v_0 + c_2^2 v_1 + c_2^3 v_2 \cdots \\ w &= c_3 w_0 + c_3^2 w_1 + c_3^3 w_2 \cdots \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (11)$$

in (2) ein, wobei $c_1 u_0, c_2 v_0, c_3 w_0$ die aus der klassischen Elastizitätstheorie erhaltenen Verschiebungen bedeuten, so lassen sich mit (10) die Spannungen bestimmen. Die Gleichgewichtsbedingungen führen dann auf lineare Gleichungssysteme zur Bestimmung der u_i, v_i und w_i . Mit denselben Vereinfachungen, die auch in der technischen Biegelehre gemacht wurden, läßt sich für den durch das Bild gegebenen Belastungsfall die Differentialgleichung für die Durchbiegung \bar{w} aufstellen

$$\frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} = A_0 - \sqrt{A_0^2 + \frac{M(x)}{B}} \quad (12)$$

wobei $M(x)$ das auf die Platte ausgeübte Biegemoment bedeutet und A_0 sowie B Materialkonstanten sind.



Die Beugung elastischer Wellen an der Halbebene

Von A.-W. Maue in Freiburg (Br.)

Das Problem der Beugung elastischer Wellen an der spannungsfreien Halbebene, das für die Diskussion der Spannungsverhältnisse in der Umgebung einer Bruchfläche in elastischem Material von Bedeutung ist, wird nach einer von C l e m m o w und von H ö n l angegebenen Methode mit Hilfe zweier Integralgleichungen formuliert. Diese lassen sich auf die Aufgabe reduzieren, eine vorgegebene verzweigte Funktion so in zwei Faktoren aufzuspalten, daß sich die Verzweigungspunkte in vorgeschriebener Weise auf beide Faktoren verteilen. Die Aufspaltung gelingt mit Hilfe des C a u c h y s c h e n Satzes. Eine ausführliche Darstellung des Gegenstandes erscheint demnächst in dieser Zeitschrift.

Strukturmodelle und Systematik der Fließvorgänge¹⁾

Von Ernst Mewes in Braunschweig

Die Fließeigenschaften vieler Stoffe werden an Hand von mechanischen Modellen veranschaulicht, die aus Federn und Dämpfern aufgebaut sind. Sofern Fließgrenzen auftreten, sind Glieder mit fester Reibung hinzuzunehmen. Das allgemeinste Modell, das sich aus parallel gerichteten Federn und Dämpfern mit linearen Gesetzmäßigkeiten aufbauen läßt, ergibt sich durch Hintereinanderschaltung von einer Feder und einem Dämpfer, d. i. zusammen ein sog. M a x w e l l - Glied, und beliebig vielen Paaren parallel geschalteter Federn und Dämpfer, d. s. sog. K e l v i n - Glieder. Dynamisch gleichwertig hiermit sind Modelle, die aus einer entsprechenden Zahl von M a x w e l l - Gliedern in Parallelschaltung aufgebaut sind.

Für beide Modelle ergibt sich die allgemein gültige Differentialgleichung zwischen Verformung γ und Belastung τ :

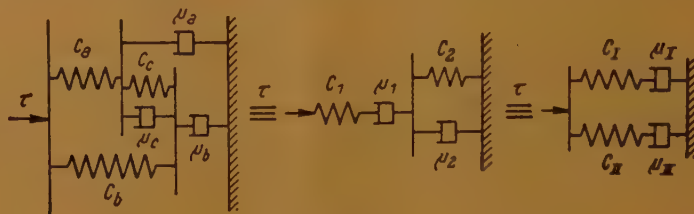
$$a_1 \dot{\gamma} + a_2 \ddot{\gamma} + \cdots + a_n \gamma^{(n)} = \tau + b_1 \dot{\tau} + b_2 \ddot{\tau} + \cdots + b_n \tau^{(n)}$$

mit den zeitunabhängigen Beiwerten a und b . n ist die Anzahl der M a x w e l l - und K e l v i n - Glieder. Diese Beziehung sieht etwas anders aus als die bisher im Schrifttum dafür angegebenen

¹⁾ Aus dem Institut für Landtechnische Grundlagenforschung in der Forschungsanstalt für Landwirtschaft.

Beziehungen (vgl. M. Reiner, Twelve Lectures on Theoretical Rheology. North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1949; ders., Deformation and Flow. Lewis, London 1949; sowie T. Alfrey, Mechanical Behaviour of High Polymers. Interscience Publishers, New York 1948, auch: The Methods of Specifying the Properties of Viscoelastic Materials. J. Appl. Phys. 16 (1945), S. 700).

Es wird nun festgestellt, daß auch jedes aus parallel gerichteten Federn und Dämpfern in beliebig komplizierter Weise aufgebaute Modell nur ein Sonderfall des geschilderten allgemein-



ten Modelles ist. Dazu wurde jeweils die Differentialgleichung unter Zuhilfenahme der Operatoren-Methode nach Heaviside aufgestellt. Für die Modelle im Bild ergibt sich

$$a_1 \dot{\gamma} + a_2 \ddot{\gamma} = \tau + b_1 \dot{\tau} + b_2 \ddot{\tau}$$

mit (c = Federhärten, μ = Viskositäten)

$$\begin{aligned} a_1 &= \mu_a + \mu_b &= \mu_1 &= \mu_I + \mu_{II}, \\ a_2 &= (c_a + c_b) b_2 &= \mu_1 \mu_2 / c_2 &= \mu_I \mu_{II} \left(\frac{1}{c_I} + \frac{1}{c_{II}} \right), \\ b_1 &= [\mu_a (c_b + c_c) + \mu_b (c_c + c_a) + \mu_c (c_a + c_b)] / b_0 &= \frac{\mu_1}{c_1} + \frac{\mu_2}{c_2} + \frac{\mu_1}{c_2} &= \frac{\mu_I}{c_I} + \frac{\mu_{II}}{c_{II}}, \\ b_2 &= (\mu_a \mu_b + \mu_b \mu_c + \mu_c \mu_a) / b_0 &= \frac{\mu_1 \mu_2}{c_1 c_2} &= \frac{\mu_I \mu_{II}}{c_I c_{II}}, \\ b_0 &= c_a c_b + c_b c_c + c_c c_a. \end{aligned}$$

Die Aufstellung von komplizierten Modellen in der Art des Systems im Bild links (s. J. M. Burgers, Mechanical considerations concerning viscosity and plasticity. Aus: First Report on Viscosity and Plasticity. Verhandl. d. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, Afd. Naturk. (I. Sect.) DI XV Nr. 3 (1935)) gibt nichts Neues hinsichtlich des Fließvorganges.

Durch geeignete Zusammenstellung von Spezialfällen des systematisch aufgebauten allgemeinen Falles (s. o.) und Betrachtung der Eigenschaften dieser Modelle (Auftreten von elastischen und plastischen Verformungen, Kriechen, Nacheilen, Nachwirken, Erschlaffen, endliche oder verschwindende Fließfestigkeit u. a.) kann eine bessere Systematik der Fließvorgänge aufgestellt werden, als sie in Nature 149 (1942), S. 702, bzw. Schweizer Archiv 9 (1943), S. 98 und Z. Kunststoffe 34 (1944), S. 26 angegeben ist.

Selbstangefachte Schwingungen von Maschinenwellen

Von *Eduard Pestel* in Hannover

Von den verschiedenen Arten selbstangefachter Schwingungen von Maschinenwellen wird der Fall behandelt, bei dem die Selbsterregung infolge der Preßsitzreibung zwischen Welle und aufgeschumpfter Scheibe eintritt. Der Entstehungsmechanismus möge am einfachen Beispiel der vollkommen ausgewuchteten senkrechten Welle erörtert werden, die eine zentrisch aufgeschumpfte Kreisscheibe trägt, deren Symmetrieebene auch bei Biegung der Welle in ihrer ursprünglichen Ebene bleibt. Ihre Drehgeschwindigkeit Ω sei höher als die der 1. Wellenkritischen. Durch irgendeine Störung werde nun die Scheibe in eine Zirkular-polarisierte Schwingung versetzt, deren Richtung mit der Drehrichtung der Welle zusammenfalle. Vom Standpunkt eines Beobachters in Scheibenmitte dreht sich nun die Scheibe nur mit einer Drehzahl entsprechend der Differenz zwischen Wellendrehzahl $2\pi\Omega$ und Schwingungsfrequenz $2\pi\omega$. Er stellt nun fest,

daß ein Punkt auf der Welle, der infolge der Drehbewegung der Welle z. B. zur Zeit t gerade die Stelle der größten Zugbeanspruchung passiert, zur Zeit $t + \frac{\pi}{\Omega - \omega}$ die Stelle der größten Druckbeanspruchung durchläuft. Infolge der mit der Zugbeanspruchung verbundenen Längung und der den Druckbeanspruchungen entsprechenden Kürzung der Werkstoffasern wird in dem Schrumpfsitz Reibungsarbeit geleistet und somit mechanische Energie nichtumkehrbar in Wärme umgewandelt. Versuche von Kimball¹⁾ haben ergeben, daß bei sonst gleichen Verhältnissen die Verzehrung mechanischer Energie hier etwa proportional dem Quadrat der Durchbiegung e der Welle an der Preßsitzstelle ist. Sein Schluß, daß dieser Energieverlust E auch unabhängig von der Drehgeschwindigkeit Ω der Welle ist, erweist sich experimentell wie mathematisch als unrichtig. Vielmehr ist E unabhängig von der Größe der Relativedrehgeschwindigkeit $\Omega - \omega$. Damit verzehrt die Reibung im Preßsitz während einer vollen Relativedrehung der Welle folgenden Betrag mechanischer Energie

$$E = 2\pi\beta e^2.$$

Die Beziehung zwischen der Konstanten β und dem zusätzlichen äußeren Antriebsmoment M , das aufgebracht werden muß, um trotz des Energieverlustes E die Drehgeschwindigkeit Ω der Welle konstant zu halten, ergibt sich wie folgt. Die sekundliche Leistung von M beträgt $M \cdot \Omega$.

Die Zeitdauer der Relativedrehung ist $T = \frac{2\pi}{\Omega - \omega}$.

Während der Zeitdauer T leistet also das zusätzliche Antriebsmoment M die Arbeit $A = M \cdot \Omega \cdot T = M \cdot 2\pi \frac{\Omega}{\Omega - \omega}$. Wegen $E = A$ folgt

$$M = \beta \frac{\Omega - \omega}{\Omega} e^2.$$

Indem man das Wirken einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungskraft (angreifend in Scheibenmitte) mit der Dämpfungskonstanten b voraussetzt, läßt sich folgendes einfaches Stabilitätskriterium aufstellen

$$b > \beta \frac{\Omega - \omega}{\omega \Omega} \dots \dots \dots (1).$$

Man erkennt, daß für verschwindende Dämpfung stabiles Verhalten nur bei unterkritischem Lauf, also für $\Omega < \omega$ vorhanden ist. Dabei ist die Kreisfrequenz ω der Störschwingung praktisch gleich der der ersten Wellenkritischen.

Unter Benutzung der Versuchsergebnisse von Kimball gewinnt man durch eine einfache Modellbetrachtung eine rohe Abschätzung für die Größenordnung von β

$$\beta = 6000 \frac{d^3 B^2}{l^4} \left[\frac{\text{kg}}{\text{mm}} \right].$$

Darin bedeutet B die Preßsitzbreite, d der Wellendurchmesser und l die Wellenlänge.

Als wirkungsvollste Gegenmaßnahme zur Bekämpfung derartiger Schwingungen hat sich der Einbau gefederter Lagerschalen erwiesen. Mit den Bezeichnungen

c_1 Federzahl der Welle,

c_2 Federzahl der Lagerfederung,

m Auf die Schrumpfsitzstelle reduzierte Masse des Wellen-Scheibenaggregates

ergibt sich dann folgendes Stabilitätskriterium, das für $c_2 \rightarrow \infty$ wieder in (1) übergeht.

$$\frac{\beta}{b \omega} < \frac{k \frac{\Omega}{\omega}}{\frac{\Omega}{\omega} - k} \left(1 + \frac{c_1}{c_2} \right) \dots \dots \dots (2)$$

mit

$$k = \sqrt{\frac{c_2}{c_1 + c_2}} \quad \text{und} \quad \omega = \sqrt{\frac{c_1}{m}}.$$

¹⁾ Kimball, A. L., Measurement of Internal Friction in a revolving Deflected Shaft. General Electric Review 28 (1925), S. 554—558.

Zur Festigkeit im vielkristallinen Werkstoff

Von A. Slibar in Wien

In der Festigkeitslehre wird angenommen, daß die metallischen Werkstoffe sowohl homogen als auch isotrop sind. Weder die erste noch die zweite Annahme ist auch nur annähernd erfüllt. Es liegt nahe, daß man bei Grenzproblemen, die bisher mit der Spannungstheorie des Kontinuums nicht lösbar waren, die Ursache des Versagens im realen Aufbau der Werkstoffe sucht. Die rechnerische Berücksichtigung des tatsächlichen Aufbaues und der Gleiteigenschaften des Polykristalls erlauben nur die Methoden der Statistik. Gemeinsam mit F. Vitovec¹⁾ wurden vom Verfasser die Einschnürung einer zentralsymmetrischen Zugprobe behandelt. Bei Berücksichtigung der tatsächlichen Verformungsmöglichkeiten des Werkstoffes folgt für die Kontur des eingeschnürten Stabes die Verteilungsfunktion der Einzelgleitungen

$$\varphi(a) = \frac{q}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-q^2 \cdot a^2} \dots \dots \dots (1),$$

wenn a den Abstand eines Querschnittes von Stabmitte, q das vom Werkstoff, dessen Vorbehandlung und den Prüfbedingungen abhängige Einschnürmaß bedeuten. Die entwickelte Funktion erlaubt die analytische Erfassung des gesamten Konturverlaufes.

In einem vielkristallinen Werkstoff behindern sich die Kristallite gegenseitig an der Verformung. Die Behinderungsbeiträge für ein bestimmtes Bezugskorn hängen ab²⁾

1) von der Anzahl i der zwischen den beiden aufeinander einwirkenden Kristalliten liegenden Schichten,

2) von der Zahl der möglichen Gleitkombinationen des Kristallsystems (K) und der mittleren Orientierungsabweichung der Kristallachsen dieser beiden Kristallite zueinander ($\Delta\omega$),

3) vom Einfluß der Korngröße und Kornoberfläche (κ).

Der Ansatz für die Wahrscheinlichkeit des Behinderens eines Bezugskornes durch eine Kugelschicht mit dem Durchmesser $i \cdot \bar{z}$ (\bar{z} mittlerer Korndurchmesser) ergibt sich daher zu

$$w(i) = \kappa \cdot \frac{\Delta\omega}{2\pi} \cdot n_i \dots \dots (2)$$

n_i ist in (2) die Anzahl der Kristallite in der als Kollektiv mit vorläufig unendlicher Merkmalmenge zusammengefaßten behindernden Schicht. Die gesamte Stützwirkung, auf ein Korn folgt als Summe der Einzelbeiträge

$$W(i) = \int_{V(i)} e^{-2K \cdot \Delta\omega \cdot i^2 \cdot \kappa} \cdot \Delta v, \quad (3)$$

wenn K , $\Delta\omega$, i und κ die bereits eingeführten Größen, Δv das umgebende Volumelement und

$V(i)$ den gesamten Behinderungsbereich als Funktion der Anzahl der umgebenden Schichten darstellen. Die rasche Konvergenz von (2) bzw. (3) erlaubt ein Abbrechen der Summenbildung bei einer Grenze $i^* = 10$ bis 15 Kristallitschichten. Bedeutet \bar{z} den mittleren Durchmesser eines Kristalliten, so ergibt die Größe $i^* \cdot \bar{z}$ die von L. Föppl³⁾ nach Versuchen vorgeschlagene neu einzuführende dritte Materialkonstante. Der Verlauf der Elastizitätsgrenze über den Querschnitt folgt bei Berücksichtigung der Störung des Behinderungsbereiches bei Annäherung an die Oberfläche (Bild).

Weitere durch Oberflächeneinflüsse verursachte Erscheinungen wurden von den Verfassern behandelt und deren Ergebnisse werden in nächster Zeit zur Veröffentlichung gelangen.

¹⁾ F. Vitovec und A. Slibar, Bestimmung der Form der beim Zugversuch sich ausbildenden Einschnürung. Öst. Ing. Arch. IV (1950).

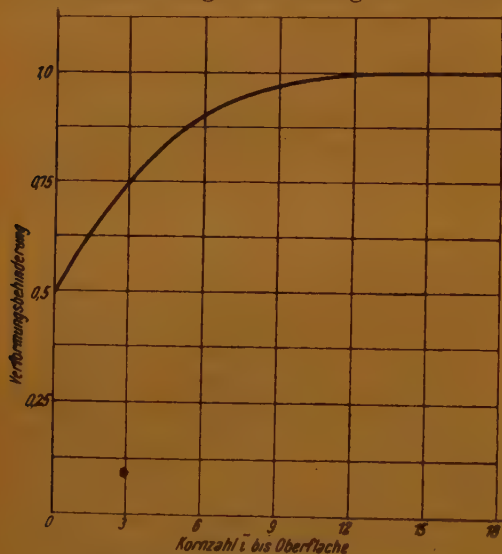
F. Vitovec und A. Slibar, Die Einschnürung einer Zugprobe als statistisches Problem. Stat. Vierteljahresschrift d. Univ. Wien, Bd. 4 (1951).

²⁾ A. Slibar und F. Vitovec, Über den Wirkungsbereich der Spannungsverfestigung. Schw. Arch. 16 (1950).

F. Vitovec und A. Slibar, Über den Einfluß der freien Oberfläche auf die Verformungsbehinderung im vielkristallinen Werkstoff. Schw. Arch. 16 (1950).

A. Slibar und F. Vitovec, Über den Einfluß der freien Oberfläche auf die Elastizitätsgrenze vielkristalliner Werkstoffe. Federhofer-Girkmann Festschrift, Wien 1950.

³⁾ L. Föppl, Drang und Zwang. III. Bd., Leibniz Verl., München 1947, S. 178.



Verlauf der Verformungsbehinderung in Abhängigkeit vom Kornabstand von der Oberfläche

Hydrodynamische Theorie fester Stoffe

Von C. Torre in Wien

Die geologischen Erscheinungen werden nach den Gesichtspunkten der Werkstoffmechanik gruppiert und mit Hilfe dieser die Spannungen in einem Gebirge berechnet. Wir haben bisher insbesondere das klüftige Gebirge (Fels) eingehend mathematisch untersucht. Dabei wurden jene Kräfte berechnet, die bei der Entstehung der Klüfte geherrscht haben. Da in einem schon beruhigten Gebirge so große Kräfte nicht mehr herrschen, haben wir näherungsweise die berechneten Grenzbeanspruchungen als fern wirkende Kräfte aufgefaßt und auf diese Weise die am Bauwerk derzeit wirkenden Kräfte ermittelt. Wir haben noch Gleichungen für die Berechnung des Zähigkeitskoeffizienten fester Stoffe angegeben und die Ergebnisse mit den Versuchen verglichen. Eine zweite geologische Erscheinung, die näherungsweise und etwas kürzer als das klüftige Gebirge behandelt wurde, ist ein zwischen zwei Berge zusammengepreßtes geologisches Gebiet, das seine Verwirklichung am Semmeringpaß bei Wien findet.

Der ausführliche Bericht des Vortrages erscheint demnächst in „Ingenieur-Archiv“.

Spiegelung beim Torsionsproblem

Von C. Weber, Schlewecke/Nette

Der Querschnitt eines tordierten Stabes sei durch zwei Kreislinien begrenzt, so daß entweder ein Querschnitt mit exzentrischem Loch oder, falls die Kreise sich berühren oder schneiden, ein sichelförmiger Querschnitt entsteht. Die Spannungsfunktion wird durch abwechselnde Spiegelung einer Singularität an den Kreislinien gefunden. Besonders anschaulich wird das Verfahren durch die konforme Abbildung des Querschnittes auf einen unendlichen Streifen. Die Untersuchung zeigt, wann Potenzreihenentwicklungen möglich sind. Auch noch nicht bekannte geschlossene Lösungen werden mit Hilfe des Verfahrens angegeben.

Biegeschwingungen des Stabes mit nichtlinearem Elastizitätsgesetz

Von F. Weidenhammer in Clausthal

Die Bewegung eines Stabes wird durch gekoppelte, nichtlineare partielle Differentialgleichungen für die Verschiebungsfunktionen $u(x,t)$ und $w(x,t)$ in Längs- und Querrichtung beschrieben, wenn man die Stabdehnung $\varepsilon = u_x + \frac{w_x^2}{2} - zw_{xx}$ über die klassische Schwingungslehre hinausgehend nichtlinear berechnet. In folgerichtiger Näherung hat man daher auch die Nichtlinearitäten in der Spannungs-Dehnungs-Gleichung des Werkstoffes zu berücksichtigen, was durch Ergänzung des Hookeschen Gesetzes durch ein kubisches Glied im Anschluß an R. Grammel [1] näherungsweise geschehen soll:

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon(1 + A\varepsilon^2).$$

Hierin bezeichnet E den Elastizitätsmodul und A eine zusätzliche, für technische Baustoffe meist negative Werkstoffkonstante. Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen hat man zunächst die kinetische Energie und die Formänderungsarbeit zu berechnen.:

$$T = \frac{\mu}{2} \int_0^l (u_t^2 + w_t^2) dx; \quad A_i = \frac{EF}{2} \int_0^l \left(u_x + \frac{w_x^2}{2}\right)^2 dx + \frac{EJ}{2} \int_0^l w_{xx}^2 dx + \frac{EJ_2 A}{4} \int_0^l w_{xx}^4 dx + \dots \quad (1).$$

Hierin bezeichnet J_2 die Querschnittgröße $\int z^4 dF = \kappa i^2 J$ (κ dimensionslose Zahl, i Flächenträgheitsradius). In A_i sind Summanden mit höheren als sechsten Potenzen von w fortgelassen worden, wobei zur Abschätzung der Größenordnungen die nachträglich kontrollierbare Annahme einer ortsunabhängigen, mit dem Hookeschen Gesetz berechneten Stablängskraft zu Grunde gelegt wurde (vgl. E. Mettler [2]). Mit dieser Annahme ergibt sich nämlich die Stablängskraft

$$S = EF \left(u_x + \frac{w_x^2}{2}\right) = \frac{EF}{l} \int_0^l \frac{w_x^2}{2} dx \dots \dots \dots (2)$$

des an beiden Enden unverschieblich ($u=0$) gelagerten Stabes als quadratisch in w . Das Hamiltonsche Prinzip liefert dann mit (1) zunächst für die Querbewegung eine nichtlineare

partielle Differentialgleichung, in der die Längsverschiebung nur in der Verbindung $u_x + w_x^2/2$ vorkommt, so daß man mit (2) eine nichtlineare Integrodifferentialgleichung für w allein mit den Randbedingungen $w = w_{xx} = 0$ für $x = 0$ und $x = l$ herleiten kann:

$$EJ w_{xxxx} + \mu w_{tt} - \frac{EF}{l} \int_0^l \frac{w_x^2}{2} dx \cdot w_{xx} + EJ_2 A(w_{xx}^2)_{xx} = 0 \quad \dots \quad (3).$$

Für den Grenzfall eines streng linearen Werkstoffgesetzes ist $A = 0$ und (3) geht dann in die bereits von S. Woinowsky-Krieger [3] und von D. Burgreen [4] auch experimentell untersuchte Integralgleichung der Stabschwingungen über. Sie läßt dann spezielle strenge

Lösungen $w = \bar{W}_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$ zu, wobei $\bar{W}_n(t)$ jeweils einer nichtlinearen Schwingungsgleichung

genügt und jede Eigenschwingungsform für sich allein bestehen kann. Im allgemeinen Falle der vollständigen Gleichung (3) ist dies nicht mehr der Fall, wie bereits R. Grammel [1] mit Hilfe eines Verfahrens der Störungsrechnung für nichtlineares Werkstoffgesetz mit linearem Verschiebungsansatz gezeigt hat. Es liegt daher nahe, zur Lösung von (3) den Ansatz

$w = \sum_n \bar{W}_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$ zu verwenden und die dimensionslosen Zeitfunktionen \bar{W}_n aus einem nicht-

linearen System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu berechnen. Um den Einfluß der Abweichungen vom Hookeschen Gesetz auf das Schwingungsverhalten des Stabes in erster Näherung zu erkennen, genügt jedoch bereits die Betrachtung einer einzigen, etwa der ersten Zeitgleichung allein:

$$\ddot{\bar{W}}_1 + \omega_1^2 \bar{W}_1 \left(1 + \left[\frac{\lambda^2}{4} + \frac{A}{\lambda^2} \frac{3}{4} \pi^4 \kappa \right] \bar{W}_1^2 \right) = 0 \quad \dots \quad (4).$$

Hierin bedeuten ω_1 die erste Biegeeigenfrequenz, λ den Schlankheitsgrad, κ die Querschnittsgröße zur Kennzeichnung von J_2 und A die zusätzliche Werkstoffkonstante. Für ein Hookesches Werkstoffgesetz ist $A = 0$, so daß dann der Vorfaktor des kubischen Rückstellgliedes in (4) stets positiv ist. Die freien Biegeschwingungen werden in diesem Falle also näherungsweise durch die Gleichung des Einmassenschwingers mit überlinearer Federkennlinie beschrieben. Für technische Werkstoffe ist A jedoch von Null verschieden und negativ, so daß dieser Vorfaktor verringert wird, jedoch für normale Werkstoffe und Stababmessungen noch positiv bleiben dürfte. Der Charakter der Schwingungen als überlinear ändert sich also nicht, wenn auch die Frequenz-Amplituden-Gleichung etwas andere Zahlenkoeffizienten erhält. — Nach Lösung von (4) läßt sich die Annahme (2) auf gleiche Weise wie bei E. Mettler [2] rechtfertigen. Insbesondere erkennt man, daß der ortsabhängige Anteil der Stabkraft (2) den Faktor π^2/λ^2 erhält und mithin bereits für Stäbe mittlerer Schlankheit vernachlässigbar klein ist.

Literatur

- [1] R. Grammel, IUTAM-Symposium über nichtlineare Schwingungen. Porquerolles 1951. Im Druck.
- [2] E. Mettler, Z. angew. Math. Mech. 31 (1951), S. 263.
- [3] S. Woinowsky-Krieger, J. appl. Mech. New York 17 (1950), S. 35.
- [4] D. Burgreen, J. appl. Mech. New York 18 (1951), S. 135.

Angenäherte Gleichgewichtsbedingungen der Schalentheorie mit Anwendung auf die Zylinderschalen

Von W. Zerna in Hannover

Die beherrschenden Gleichungen der Elastostatik dünner Schalen sind bekanntlich die Gleichgewichtsbedingungen am Schalenelement und das Elastizitätsgesetz, das den Zusammenhang zwischen Schnittgrößen und Verschiebungen vermittelt. Während sich nun die Gleichgewichtsbedingungen in mathematisch exakter Form ableiten lassen, müssen zur Aufstellung des Elastizitätsgesetzes anschaulich physikalische Vorstellungen zu Hilfe genommen werden, die durch gewisse Annahmen eingeführt werden. Diese Annahmen bedingen, daß die Theorie nur als erste Näherung anzusprechen ist. Es erhebt sich damit die Frage, ob in den mathematisch streng abgeleiteten Gleichgewichtsbedingungen vielleicht Glieder enthalten sind, die über eine erste Näherung hinausgehen und damit logischerweise zu vernachlässigen wären, so daß sich dann ebenfalls angenäherte Gleichgewichtsbedingungen ergeben.

Diese Frage soll nachfolgend behandelt und gezeigt werden, daß in der Tat für eine erste Näherung an Stelle der exakten Gleichgewichtsbedingungen angenäherte treten.

Zunächst wird die Betrachtung in ganz allgemeiner Form durchgeführt und dann die Bedeutung des Ergebnisses am Beispiel der Zylinderschale aufgezeigt.

Bezeichnen $n^{\alpha\beta}$ den Längskrafttensor, q^α den Querkraftvektor, $m^{\alpha\beta}$ den Momententensor, p^β , p die Komponenten der Belastung und b_β^α die gemischte Form der Koeffizienten der zweiten Fundamentalform der Mittelfläche ¹⁾, so lauten die exakten Gleichgewichtsbedingungen ²⁾

$$n^{\alpha\beta}|_\alpha - b_\alpha^\beta q^\alpha + p^\beta = 0 \quad \dots \dots \dots (1),$$

$$n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + q^\alpha|_\alpha + p = 0 \quad \dots \dots \dots (2),$$

$$m^{\alpha\beta}|_\alpha - q^\beta = 0 \quad \dots \dots \dots (3).$$

Die Dehnungen bzw. Gleitungen der Mittelfläche werden beschrieben durch

$$\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (v_{\mu|\nu} + v_{\nu|\mu} - b_{\mu\nu} w) \quad \dots \dots \dots (4),$$

worin v_μ , w den Komponenten des Verschiebungsvektors entsprechen.

Für die Verkrümmungen bzw. Drillungen der Mittelfläche ergeben sich in erster Näherung die Ausdrücke

$$\omega_{\mu\nu} = -w|_{\mu\nu} \quad \dots \dots \dots (5).$$

Nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit gilt

$$\delta U = \delta^* A_c + \delta^* A_p \quad \dots \dots \dots (6).$$

Darin bedeutet δU die bei einer virtuellen Verrückung entstehende elastische Energie, $\delta^* A_c$ die virtuelle Arbeit der längs der Randkurve c angreifenden Randkräfte bzw. Momente und $\delta^* A_p$ die virtuelle Arbeit der Belastung.

Die elastische Energie läßt sich durch

$$\delta U = \iint (n^{\mu\nu} \delta \alpha_{\mu\nu} + m^{\mu\nu} \delta \omega_{\mu\nu}) dS \quad \dots \dots \dots (7)$$

ausdrücken, wenn dS das Flächenelement der Mittelfläche bezeichnet. Wird darin (3), (4) und (5) eingesetzt, so ergibt sich nach einigen Zwischenrechnungen

$$\iint \{ (n^{\mu\nu}|_\mu + p^\nu) \delta v_\nu + (n^{\mu\nu} b_{\mu\nu} + q^\mu|_\mu + p) \delta w \} dS = 0 \quad \dots \dots \dots (8).$$

Da δv_α , δw willkürliche und unabhängige virtuelle Verrückungen sind, so folgt aus (8)

$$n^{\alpha\beta}|_\alpha + p^\beta = 0 \quad \dots \dots \dots (9),$$

$$n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + q^\alpha|_\alpha + p = 0 \quad \dots \dots \dots (10).$$

Diese Gleichungen treten an Stelle der Gleichgewichtsbedingungen (1) und (2). Ein Vergleich mit ihnen zeigt, daß (2) mit (10) übereinstimmt, während in (9) das Glied mit q^α fehlt. Somit stellt also (9) die angenäherte Form der Gleichgewichtsbedingungen (1) dar.

Die Bedeutung dieses Ergebnisses soll jetzt am Beispiel der Zylinderschale gezeigt werden.

Mit den üblichen Bezeichnungen lauten die (1) entsprechenden exakten Gleichgewichtsbedingungen der Zylinderschale ³⁾

$$N'_x + N_{\varphi x} + X = 0, \quad N'_\varphi + N_{x\varphi} - Q_\varphi + Y = 0 \quad \dots \dots \dots (11).$$

Punkte bedeuten Ableitungen nach φ , Striche nach $\frac{x}{a}$, wenn x und φ Zylinderkoordinaten und a den Krümmungsradius angeben.

Die (9) entsprechenden angenäherten Gleichungen sind

$$N'_x + N_{\varphi x} + X = 0, \quad N'_\varphi + N'_{x\varphi} + Y = 0, \quad \dots \dots \dots (12)$$

die sich in einfacher Weise wie in der Scheibentheorie durch eine Spannungsfunktion identisch befriedigen lassen, was für den Aufbau der Theorie der Zylinderschale von Vorteil ist.

¹⁾ Kleine griechische Buchstaben durchlaufen die Zahlen 1 und 2, über doppelt auftretende gleiche Indizes ist entsprechend der Summationsregel zu summieren; kovariante Differentiation in Bezug auf die Mittelfläche ist durch einen senkrechten Strich angezeigt.

²⁾ Vgl. A. E. Green und W. Zerna, Quart. Journ. Mech. and Applied Math. 3 (1950), S. 9.

³⁾ Vgl. z. B. W. Flügge, Statik und Dynamik der Schalen, Berlin 1934, S. 110.

Ausführliche Referate folgender Vorträge:

E. Mettler: Bericht über die Theorie der nichtlinearen Schwingungen elastischer Körper.

H. Richter: Elasto-plastische Reflexion eines Stabes.

H. Schaeffer: Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums und des elastischen Körpers.

F. Schultz-Grunow: Greensche Funktionen für elastische Platten.

G. Sonntag: Die Rohrschelle, ihre Beanspruchung und Wirkung auf das Rohr unter Berücksichtigung eines anfänglichen Spieles

werden in den nächsten Heften dieser Zeitschrift erscheinen.

Referate der Vorträge:

H. Föppl: Betrachtungen über den Einfluß kleiner elastischer und plastischer Verformungen auf die Versprödung von Stahl.

L. N. Persen: Über Einflußfelder der Kreisplatte und der unendlich ausgedehnten Kragplatte

sind nicht eingegangen.

G. Strömungslehre

Schmiermitteldruck und Randverformung des elastischen Rollenlagers

Von Johannes Dörr in Darmstadt

Um zu Aussagen über die Lebensdauer von Rollenlagern kommen zu können, muß man die im Betrieb auftretenden Schub- und Normalspannungen in den Rollen, der Lagerschale und der Welle kennen. Diese Spannungen lassen sich berechnen, wenn man die an den Lagerelementen angreifenden Randkräfte kennt. Diese Randkräfte sind aber identisch mit den im Schmiermittelspalt zwischen den Rollen einerseits und der Schale bzw. Welle andererseits auftretenden Druck- und Schubkräften des Schmiermittels.

Zur Berechnung der Schmiermittelkräfte genügt die Kenntnis der Spalthöhe als Funktion der Längenkoordinate. Bei einem als unverformbar angenommenen Rollenlager läßt sich die Spalthöhe aus dem Radius der Rolle und dem Radius der Welle bzw. Schale unmittelbar angeben, sofern man für die Mindestspalthöhe einen Wert vorgibt. Die Ermittlung der Schmiermitteldrücke stellt dann lediglich eine Integrationsaufgabe dar.

Beim verformbaren Rollenlager ist die Form des Schmiermittelspaltes nicht von vornherein bekannt. Die Spaltform wird nämlich wesentlich beeinflusst von den Normalverschiebungen, die die Oberflächen des Rollenrandes und des Wellen- bzw. Schalenrandes unter dem Einfluß der an ihnen wirkenden Kräfte erleiden.

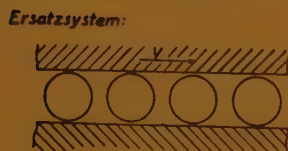
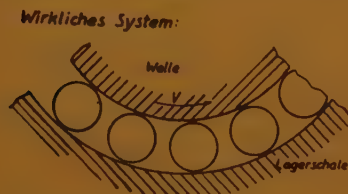


Bild 1

Zur Vereinfachung der folgenden Überlegungen führen wir einige unwesentliche Vereinfachungen ein. Wir nehmen nur die Rollen als elastisch an und ersetzen das wirkliche Rollenlager durch das in Bild 1 gezeigte Ersatzsystem. Die hierfür gefundenen Ergebnisse lassen sich mit einfachen Beziehungen auf das wirkliche System übertragen. [Ferner werde das System in Richtung der Rollenachse als beidseitig unendlich lang angesehen, um mit ebenen Verformungszuständen und Druckfeldern rechnen zu können.

Die Berechnung der Normalverformung eines mit periodischen Druckkräften der Periode π belasteten Rollenrandes läßt sich mit Hilfe der speziellen Green'schen Funktion

$$G(\varphi) = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \left(2 \cos \varphi \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| + 2 - \frac{\pi}{2} \frac{1-2\nu}{1-\nu} |\sin \varphi| \right)$$

streng durchführen. Sie stellt die Radialauslenkung durch zwei auf demselben Durchmesser liegende, zum Mittelpunkt weisende Einheitskräfte dar. Die Winkelkoordinate φ wird von diesem Durchmesser aus gemessen.

Da sich die Schmiermitteldrücke auf sehr kleine Winkelbereiche konzentrieren, dürfen wir $\operatorname{tg}(\varphi/2)$ linearisieren. Außerdem dürfen wir in einem kleinen Winkelbereich den Rand der un-

verformten Rolle durch eine Parabel ersetzen. Mit den üblichen, von Reynolds genauer begründeten Vereinfachungen erhält man dann für den Schmiermitteldruck die Beziehung

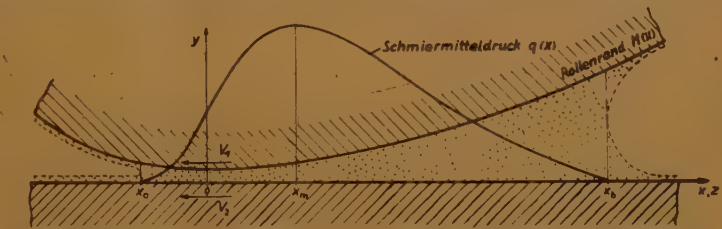
$$q(x) = -6\eta(V_1 + V_2) \int_x^{x_b} \frac{H'(x_a) - H(z)}{H^3(z)} dz \quad (1a),$$

wobei die Spaltweite durch

$$H(x) = s + \frac{x^2}{2R} - \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{x_a}^{x_b} q(z) \left(\ln \frac{|x-z|}{2R} + 1 \right) dz \quad (1b)$$

beschrieben wird, und s ein frei vorgebbarer Parameter ist, der beim unverformbaren Lager die Mindestspaltweite darstellt. Durch η wird das Zähigkeitsmaß gekennzeichnet, V_1 und V_2 sind die substantiellen Geschwindigkeiten der Spaltränder, bezogen auf die Stelle engster Spaltweite. Alle andern Bezeichnungen gehen aus Bild 2 hervor. Wenn der Randpunkt der Druckkurve x_b vorgegeben wird, so bestimmt sich der andere Randpunkt x_a aus der Bedingung

$$q(x_a) = q'(x_a) = 0 \quad (1c).$$



Rollenlager in der Umgebung der Stelle kleinster Spaltweite

Bild 2

Bei starker Schmierung ist $x_b \gg x_a$, wodurch der Grenzfall $x_b \rightarrow \infty$ mathematisch gerechtfertigt wird. Wir behandeln hier nur diesen technisch sehr wichtigen Grenzfall.

Zur Lösung der durch (1) formulierten Aufgabe kommen nur Iterations- oder Probiervverfahren in Frage. Das nächstliegende Iterationsverfahren besteht darin, für $q(z)$ eine plausible Funktion anzunehmen, hiermit $H(x)$ nach (1b) und die verbesserte Druckkurve nach (1a) und (1c) zu berechnen, um mit dieser verbesserten Druckkurve das Verfahren zu wiederholen. Die Schwierigkeit besteht dabei darin, daß sich $(x_m - x_a)$ stark mit der relativen Größe der Spaltverformung ändert. Das wird überwunden durch eine Koordinatentransformation

$$x = \lambda \zeta + x_a, \quad q(\lambda \zeta + x_a) \equiv p(\zeta), \quad H(\lambda \zeta + x_a) \equiv h(\zeta),$$

durch die der Punkt x_a in den Punkt $\zeta = 0$ und der Punkt x_m bei geeigneter Wahl von λ in den Punkt $\zeta = 1$ überführt wird. Die Beziehungen (1) lassen sich dann in folgender Form schreiben:

$$\frac{h'(\zeta)}{h(0)} = b \left[a + 2\zeta + \kappa \frac{K(\zeta)}{K(0,4)} \right] \quad (2a),$$

$$p(\zeta) \frac{h^2(0)}{6\eta V \lambda} = \int_0^\zeta \left[\frac{h^3(0)}{h^3(\xi)} - \frac{h^2(0)}{h^2(\xi)} \right] d\xi \quad (2b),$$

$$K(\zeta) = \int_0^\infty \frac{p(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi \quad (2c).$$

Damit $p(\zeta)$ an der Stelle $\zeta = 1$ sein Maximum hat, muß gelten:

$$h(0) = h(1) \quad \text{also} \quad a = -1 - \frac{\kappa}{K(0,4)} \int_0^1 K(\zeta) d\zeta \quad (3).$$

Die Konstante b bestimmt sich aus der Forderung $p(\infty) = 0$. Der Parameter κ charakterisiert die Stärke der relativen Verformung und wird bei dem Iterationsverfahren vorgegeben. Durch den Quotienten $K(\zeta)/K(0,4)$ erreichen wir eine Normierung der Verformungsfunktion an der Stelle $\zeta = 0,4$.

Das Iterationsverfahren läuft wie folgt. Mit einer angenommenen Druckkurve nullter Näherung wird $K(\zeta)$ nach (2c) und a nach (3) berechnet. Durch Probieren und Interpolation wird dann der Wert b festgelegt, indem zuerst $h(\zeta)/h(0)$ nach (2a) und dann die Druckkurve

1. Näherung nach (2b) mit der Eigenschaft $p(\infty) = 0$ ermittelt wird. Mit den verbesserten Druckkurven wird das Verfahren wiederholt, bis ausreichende Konvergenz eintritt.

Bei diesem Verfahren ist die Berechnung der „Verformungsintegrale“ $K(\zeta)$ sehr lästig wegen des singulären Integranden. Diese Schwierigkeit wird überwunden durch Einführung von elementaren Druckfunktionen

$p_v(\zeta)$, die die Eigenschaft haben, daß sich ihre zugeordneten Verformungsintegrale $K_v(\zeta)$ streng berechnen lassen. Als $p_0(\zeta)$ wurde die Druckfunktion des unverformten Rollenlagers gewählt. Für die übrigen $p_v(\zeta)$ mit $v = 1, 2, 3, \dots$ erwiesen sich Funktionen der Form

$$p_v(\zeta) = \frac{\zeta^m (1 - \zeta)^2}{[1 + (\zeta - 0,5)^2]^n}$$

mit $m = 2$ oder 3 und $n = 3, 4, 5$ als geeignet. Die durch Iteration gefundenen Druckkurven werden durch Reihen der $p_v(\zeta)$ angenähert, wodurch sich die zugeordneten Verformungsintegrale sofort als Reihen der $K_v(\zeta)$ ergeben.

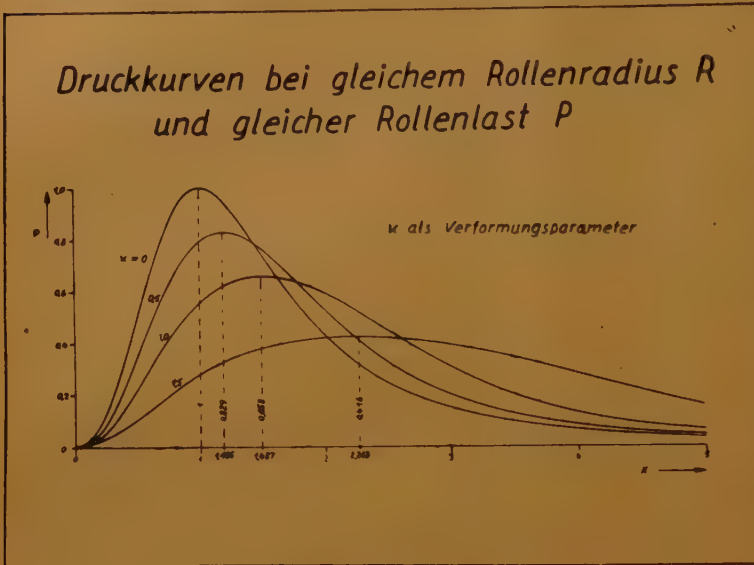


Bild 3

Das Verfahren erwies sich bis zu relativ großen Verformungen als brauchbar. Bei sehr großen Verformungen ergaben sich Schwierigkeiten, die aber im Wesen der Aufgabe begründet sind, da sich bei starken Verformungen die Spaltweite als kleine Differenz großer Zahlen ergibt. Bild 3 zeigt die bisher ermittelten Druckkurven. Über weitere Einzelheiten, insbesondere über den Zusammenhang zwischen dem Verformungsparameter und den Betriebsdaten des Rollenlagers wird bei anderer Gelegenheit berichtet werden.

Eine neue Reihenentwicklung für laminare Grenzschichten

Von H. Görtler in Freiburg i. Br.

Die bekannte Blasius'sche Reihe für stationäre, ebene, laminare Grenzschichten hat den Vorteil der einfachen Anwendbarkeit, weil die erforderlichen Koeffizientenfunktionen sich rasch als Linearkombinationen von vorweg ein- für allemal zu vertafelnden universellen Funktionen berechnen lassen. Trotz der heute weit fortgeschrittenen Vertafelungsarbeiten kann man jedoch wegen der geringen Konvergenzgüte kaum hoffen, unter Verwendung der mit praktisch erreichbarer Ordnung abgebrochenen Reihe eine Grenzschicht vom vorderen Staupunkt bis zu einer eventuell vorhandenen Ablösungsstelle mit ausreichender Approximation zu berechnen. Entsprechendes gilt für Abwandlungen oder mögliche Verallgemeinerungen der Reihe sowie für die zugeordnete Reihe für die Querkomponente der Geschwindigkeit bei Schräganblasung des Zylinders ¹⁾.

Diesem Versagen der Blasius'schen Reihe liegen vor allem zwei Tatsachen zugrunde: 1. Die äußere Randbedingung, wonach die wandparallele Geschwindigkeitskomponente asymptotisch in die vorgegebene äußere Geschwindigkeitsverteilung $U(x)$ (x Wandbogenlänge) überzugehen hat, wird durch gliedweises Abgleichen der Blasius'schen Reihe mit der Reihenentwicklung von $U(x)$ erfüllt — genügend genau also erst bei Berücksichtigung von Gliedern entsprechend hoher Ordnung —; 2. Die benutzten Koordinaten — neben x der senkrechte Wandabstand y — haben, da Krümmungseinflüsse in der Theorie vernachlässigt sind, nur die Bedeutung cartesischer Koordinaten in der Ebene der Abwicklung der Kontur auf die x -Achse und sind nicht den speziellen Daten des jeweiligen Problems in besonderer Weise angepaßt.

¹⁾ Einige hierzu gehörige universelle Funktionen für einen Sonderfall findet man in Diagrammen (keine Zahlentafeln) dargestellt bei W. Sears, Journ. Aeron. Sci. 15 (1948), S. 49—52. Sorgfältig berechnete Zahlentafeln für den allgemeinen Fall werde ich in Kürze im Arch. Math. veröffentlichen.

Es wird eine neue Reihenentwicklung vorgeschlagen unter Verwendung der unabhängigen Koordinaten ²⁾

$$\xi = \frac{1}{\nu} \int_0^x U(x) dx, \quad \eta = U(x) \cdot y / \left\{ \nu \int_0^x U(x) dx \right\}^{1/2}$$

(ν kinematische Zähigkeit). Die Reihe stellt eine Entwicklung nach Potenzen von ξ dar mit von η abhängigen Koeffizientenfunktionen, die wieder auf Linearkombinationen universeller Funktionen zurückgeführt werden können. Das erste Glied der neuen Reihe erfüllt die äußere Randbedingung exakt, die weiteren Glieder bringen nur Korrekturen im Inneren der Grenzschicht.

Bereits das erste Glied der neuen Reihe gibt eine brauchbare Approximation der Grenzschicht vom vorderen Staupunkt (bzw. Vorderkante bei Anströmung von Konturrecken oder -spitzen) bis weit stromabwärts, wo das entsprechende erste Glied der Blasius'schen Reihe überhaupt keine Approximation mehr liefert. Dieses erste Glied ist im wesentlichen ein Hartree-Profil, jedoch mit der obigen Variablen η , welche das örtliche $U(x)$ und die Vorgeschichte berücksichtigt. Die Vertafelungsarbeiten für die Glieder höherer Ordnung sind in Angriff genommen.

Aus Raumgründen muß hier darauf verzichtet werden, auf verschiedene im Zusammenhang mit der neuen Reihe stehenden theoretischen und praktischen Fragen auch nur andeutend einzugehen. Ein ausführlicher Bericht wird vorbereitet. Von zentraler Bedeutung ist eine gewisse

Funktion $\beta(\xi)$ (deren Entwickelbarkeit in $\sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_{\nu} \xi^{\nu}$ vorausgesetzt wird, worin β_0 der Hartree-Parameter ist und durch die Verhältnisse an der Vorderkante bestimmt wird). Als einziger Koeffizient der Differentialgleichung in den neuen Variablen enthält diese Funktion die Daten des Problems, während die übrigen Koeffizienten und die Randbedingungen universell sind.

Zur Energieverteilung in strömenden Medien

Von G. Heinrich in Wien

Die Gleichung für die stationäre Bewegung der homogenen und reibungsfreien Flüssigkeit läßt sich bekanntlich auf die Form bringen:

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + P + U \right)$$

mit P als Druckfunktion und U als Potential der Massenkräfte.

Wir setzen $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{t}$ (\mathbf{w} ist Wirbelvektor). Da \mathbf{t} die Translation des Wirbelvektors mißt, soll er, nach einem Vorschlag von L. Flamm, als Translator bezeichnet werden. Der Translator spielt hier die Rolle eines Energiedichtegradienten und ist daher für die homogene und reibungsfreie Flüssigkeit wirbelfrei, während er im allgemeinen Wirbel besitzt. Nach dem Stokes'schen Satz gilt also für homogene und reibungsfreie Flüssigkeiten bei stationärer Bewegung:

$$\iint (\nabla \times \mathbf{t}) \cdot d\mathbf{v} = \oint \mathbf{t} \cdot d\mathbf{x} = 0.$$

Das Linien-Integral $\oint \mathbf{t} \cdot d\mathbf{x}$ des Translators läßt sich aber leicht mit der Zirkulation $\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$ in Zusammenhang bringen. Bildet man nämlich den substantiellen Differentialquotienten

$$\frac{D\Gamma}{dt} = \oint \frac{D\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{x} + \oint \mathbf{v} \cdot \frac{Dd\mathbf{x}}{dt},$$

so ergibt sich aus der Umformung

$$\frac{D\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) - \mathbf{t}$$

²⁾ D. M e k s y n [Proc. Roy. Soc. A 192 (1948), S. 545—576 und spätere Arbeiten in der gleichen Zeitschrift] benutzt bei grenzschichttheoretischen Untersuchungen Koordinaten, die er aus Potential und Stromfunktion der Potentialströmung um den Körper in bestimmter Weise bildet. Unsere Koordinaten sind im wesentlichen grenzschichttheoretische Vereinfachungen seiner Koordinaten, hier exakt eingeführt, mit dem Vorteil der unmittelbaren einfachen Berechenbarkeit, während die Berechnung der M e k s y n'schen Koordinaten bei jedem allgemeineren Körper zunächst eine erhebliche Aufgabe darstellt. W. M a n g l e r (vgl. W. T o l l m i e n, „Laminare Grenzschichten“, S. 30/31, in FIAT Review of German Science 1939—1946, Band „Hydro- und Aerodynamik“, 1948) hat Reihenentwicklungen nach unserer Variablen ξ vorgeschlagen, benutzt aber zur Bildung der zweiten unabhängigen Variablen die Stromfunktion der Grenzschicht, die sich erst mit der Grenzschichtberechnung ergibt und deren Benutzung entsprechend umständlicher ist. Den Hinweis auf den M a n g l e r'schen Vorschlag verdanke ich Herrn T o l l m i e n.

für stationäre Strömung:

$$\frac{D\Gamma}{dt} = \oint \left[\nabla \left(\frac{|v|^2}{2} \right) - t \right] \cdot dx + \oint d \left(\frac{|v|^2}{2} \right) = - \oint t \cdot dx + \oint d(|v|^2).$$

Das zweite Integral verschwindet längs eines geschlossenen Weges, daher verbleibt:

$$\oint t \cdot dx = - \frac{D\Gamma}{dt}.$$

Das Linienintegral des Translators längs einer geschlossenen Kurve ist also gleich dem negativen substantiellen Differentialquotienten der Zirkulation längs derselben Kurve. Daraus kann man auch sofort auf den T h o m s o n s c h e n Satz von der Konstanz der Zirkulation längs einer geschlossenen flüssigen Linie bei reibungsfreien homogenen Flüssigkeiten schließen. Bei inhomogenen Flüssigkeiten folgt aus dem Satz von B j e r k n e s:

$$\nabla \times t = \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p.$$

Der Translator $t = v \times w$ hat die Form des bekannten P o y n t i n g s c h e n Vektors der Elektrodynamik:

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}).$$

Dies legt die Frage nach einem Energietransportvektor der strömenden Flüssigkeit nahe. Der Vektor $v \times w$ hat jedoch nicht die Bedeutung eines Transportvektors der Energie. Ein solcher ist, soweit mir bekannt, für den Fall einer Flüssigkeit, die den S t o k e s - N a v i e r s c h e n Gleichungen genügt, noch nicht eingeführt worden. Der Energietransportvektor \mathfrak{S} soll so definiert werden, daß $dE = (\mathfrak{S} \cdot do) dt$ die in der Zeit dt durch das Flächenelement do transportierte mechanische Energie ist. Diese setzt sich zusammen aus der durch do hindurchtretenden Bewegungsenergie, der potentiellen Energie und der mechanischen Arbeit, die von der durchtretenden Flüssigkeit während dt geleistet wird.

Nach dem S t o k e s - N a v i e r s c h e n Ansatz ist der Spannungsaffinor p gegeben durch:

$$p = -\mathfrak{S}p + \eta (\nabla, v + v, \nabla) - \lambda \mathfrak{S} (\nabla \cdot v).$$

\mathfrak{S} ist hierin der Einheitsaffinor, ∇, v und v, ∇ bedeuten dyadische Produkte. Nach S t o k e s ist $\lambda = \frac{2}{3} \eta$, doch wollen wir diese etwas problematische Annahme hier nicht einführen. Das Skalarprodukt $p \cdot do$ ist somit der Spannungsvektor der im Element do auftretenden Schnittspannung. Die Arbeit, die die durch do hindurchtretende Flüssigkeit während dt leistet, ist gegeben durch $dA = -(p \cdot do) \cdot v dt$, oder, wegen der Symmetrie von p : $dA = -(p \cdot v) \cdot do dt$. Die gesamte durch do transportierte Energie ist daher:

$$dE = \left(\frac{|v|^2}{2} + U \right) \rho v \cdot do dt - (p \cdot v) \cdot do dt$$

und daher der Energietransportvektor:

$$\mathfrak{S} = \left(\frac{|v|^2}{2} + U \right) \rho v - p \cdot v.$$

Durch Einsetzen des Wertes von p ergibt sich

$$\mathfrak{S} = \left(\frac{\rho}{\rho} + \frac{|v|^2}{2} + U \right) \rho v - \eta v \cdot (\nabla, v + v, \nabla) + \lambda v (\nabla \cdot v).$$

Für die reibungsfreie Flüssigkeit ($\eta = 0$ und $\lambda = 0$) hat somit \mathfrak{S} die Richtung von v , für die zähe Flüssigkeit schließt \mathfrak{S} i. a. einen Winkel mit v ein.

Bildet man $\text{div } \mathfrak{S}$ so erhält man, bei Benützung der S t o k e s - N a v i e r s c h e n Gleichung in der Form

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \left(\frac{|v|^2}{2} \right) - v \times (\nabla \times v) = - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla U - \nu \nabla^2 v + \left(\nu - \frac{\lambda}{\rho} \right) \nabla (\nabla \cdot v)$$

den Ausdruck:

$$\text{div } \mathfrak{S} = \nabla \cdot \mathfrak{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho |v|^2}{2} + \rho U \right) + p (\nabla \cdot v) - \eta (\nabla, v) \cdot (\nabla, v + v, \nabla) + \lambda (\nabla \cdot v)^2.$$

div \mathcal{E} stellt aber die Quellung der Energie pro Volums- und Zeiteinheit dar, und diese ist gleich der Abnahme der Bewegungs- und der potentiellen Energie, ferner einem von der Volumsdilatation abhängigen Glied, das von einer thermodynamischen Umsetzung herrührt und der Energiedissipation durch innere Reibung.

Literatur

- G. Heinrich, Zur Theorie der stationären, reibungsfreien Wirbelströmung, Anzeiger der Österr. Akad. d. Wiss. Jahrg. 1950, Nr. 4.
G. Heinrich, Der Energietransport in strömenden Medien, erscheint demnächst in dieser Zeitschrift.
G. Heinrich, Ergänzungen zu dem Aufsatz „Der Energietransport in strömenden Medien“, soll ebenfalls in dieser Zeitschrift erscheinen.

Indirekte Bestimmung von Lüfterkennlinien

Von W. Richter in Frankenthal

Wenn in einem einfachen geschlossenen Leitungssystem mit einer Querverbindung zwei Lüfter arbeiten, so können drei wesentlich voneinander verschiedene Aufgaben vorliegen: vollständige Hintereinanderschaltung, Parallelschaltung und teilweise Hintereinanderschaltung. Wenn im passiven Teil des Leitungssystems verschiedene Drosselzustände eingestellt werden können und einer der beiden Lüfter zumindest in einem begrenzten Bereich regelbar ist, so kann man aus einer Messung dieses Lüfters auf die Kennlinie des zweiten Lüfters schließen. Die Aufgabe führt jeweils auf eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Für deren graphische Lösung kann eine Leitkurve (E. Czuber, Z. Math. Phys. 44 (1899), S. 41—49) verwendet werden, deren Parameterdarstellung angegeben wurde. Aus der Möglichkeit, im normalen Lüfterarbeitsbereich die Kennlinie eines Lüfters gut durch eine Parabel zu ersetzen, wurden rechnerische Näherungslösungen hergeleitet. Diese graphischen und rechnerischen Verfahren wurden an praktischen Beispielen erläutert und deren Ergebnisse miteinander verglichen. Eine praktische Verwendung empfiehlt sich wohl nur dann, wenn man die Kennlinie des zweiten Lüfters direkt nicht bestimmen kann. Insbesondere erhält man auf diese Weise zwei verschiedene Möglichkeiten, den natürlichen Auftrieb einer Grube durch Messungen am Hauptgrubenlüfter zu bestimmen. Ihre Anwendung setzt voraus, daß die Messungen am Hauptgrubenlüfter mit hinreichender Genauigkeit möglich sind.

Ein neues Verfahren zur Berechnung turbulenter Grenzschichten

Von J. Rotta in Göttingen

Das neue Berechnungsverfahren, dessen theoretische Grundlagen in vorausgegangenen Veröffentlichungen ¹⁾ niedergelegt wurden, gilt für turbulente Grenzschichten inkompressibler Strömungen mit beliebigem Druckverlauf. Für die Bestimmung der Impulsverlustdicke wird die bekannte Impulsgleichung benutzt. Für die dabei in dem Verhältnis H_{12} der Verdrängungsdicke δ_1 zur Impulsverlustdicke δ_2 ausgedrückte Profilform und den örtlichen Reibungsbeiwert c_f sind noch weitere Beziehungen erforderlich. Eine dieser Beziehungen liefert die Energiegleichung, die das Gleichgewicht zwischen der der Grundströmung entzogenen Energie, der dissipierten Energie und der mit der Grundströmungsgeschwindigkeit fortgeführten Turbulenzenergie beschreibt. Die übrigen Zusammenhänge werden im wesentlichen durch drei grundsätzliche Annahmen vermittelt, die für das Verfahren kennzeichnend sind:

1. Die Grenzschicht kann aus einem wandnahen und einem äußeren Teil zusammengesetzt werden.
2. Die äußeren Teile der Geschwindigkeitsprofile können als einparametrische Familie aufgefaßt werden.
3. Der Zusammenhang zwischen den Profilen der Grundströmungsgeschwindigkeit und den Verteilungen der statistischen Schwankungen kann als eindeutig angesehen werden.

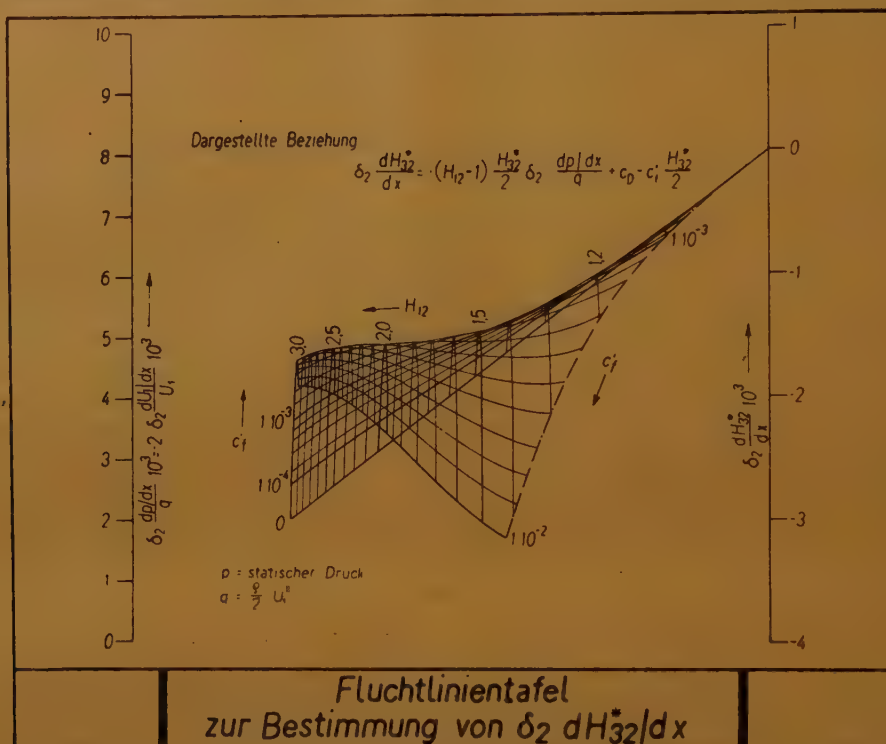
Auf Grund der ersten und zweiten Annahme läßt sich der Reibungsbeiwert c_f als Funktion des gebräuchlichen Profilparameters H_{12} , der Reynoldszahl und der Wandrauhigkeit darstellen. Für den Reibungsbeiwert bei glatten und sandrauh Oberflächen wurden Kurven- tafeln angefertigt.

¹⁾ J. Rotta, Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Nr. 1, Göttingen 1950. — J. Rotta, Schubspannungsverteilung und Energiedissipation bei turbulenten Grenzschichten, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 195.

Nach Einführung einer Gesamtenergie-Verlustdicke

$$\delta_3^* = \int_0^\infty \frac{U}{U_1} \left[1 - \left(\frac{U}{U_1} \right)^2 - \frac{\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}}{U_1^2} \right] dy,$$

bei der die Umwandlung von Grundströmungsenergie in Turbulenzenergie nicht als Energieverlust betrachtet wird, läßt sich die Energiegleichung unter Benutzung der Impulsgleichung in eine Differentialgleichung für die Änderung des Formverhältnisses $H_{32}^* = \delta_3^*/\delta_2$ umwandeln. Dabei ist U die Grundströmungsgeschwindigkeit, U_1 deren Wert außerhalb der Grenzschicht und u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeitsschwankungen. Man kann diese Differentialgleichung in einer Fluchtlinientafel darstellen (Bild), wobei die Energiedissipation durch die dimensionslose



Größe c_D berücksichtigt wird. Reynoldszahl und Wandrauigkeit werden dabei durch den örtlichen Reibungsbeiwert ausgedrückt, so daß diese Tafel sowohl für glatte als auch für rauhe Oberflächen gilt. Auch für Rotationskörper und Keilströmungen hat diese Tafel unverändert Gültigkeit. Das Formverhältnis H_{32}^* ist eine Funktion von H_{12} und c_f' . Dieser Zusammenhang kann näherungsweise ebenfalls als Fluchtlinientafel dargestellt werden, die auch wieder in gleicher Weise für glatte und rauhe Oberflächen gilt. Die Zusammenhänge ergeben mit der Impulsgleichung zusammen ein System von 2 Differentialgleichungen, das sich mit gebräuchlichen Integrationsmethoden lösen läßt.

Die Festsetzung der Anfangswerte geht davon aus, daß Impulsstrom und Energiestrom beim Übergang vom laminaren zum turbulenten Zustand keine Änderungen erfahren, so daß δ_2 , δ_3^* und somit auch H_{32}^* unverändert bleiben. Liegen diese Daten der laminaren Anlaufstrecke bis zum Umschlag vor, so sind hinreichende Angaben über die Anfangswerte der turbulenten Rechnung bekannt.

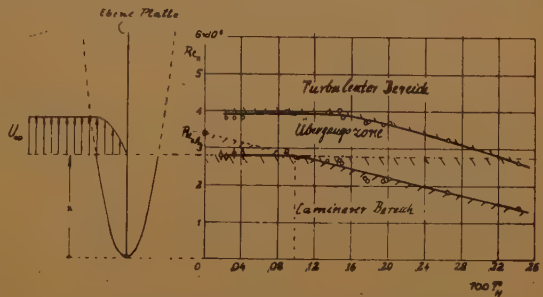
Das Verfahren ist durch folgende Besonderheiten ausgezeichnet:

1. Es ist für glatte und rauhe Oberflächen anwendbar.
2. Der Einfluß des Grenzschichtdickenverhältnisses H_{12} auf den Reibungsbeiwert wird gemäß experimentellen Beobachtungen berücksichtigt.
3. Die allen bekannten Verfahren zugrundeliegende Annahme der Einparametrigkeit der Geschwindigkeitsprofile ist durch den Aufbau der Grenzschicht aus 2 Teilen verfeinert, so daß das Grenzschichtprofil nicht durch das Verhältnis H_{12} allein, sondern durch H_{12} und c_f' beschrieben wird.
4. Die Frage der Anfangswerte findet durch den stetigen Verlauf von Impuls- und Energiestrom eine befriedigende Beantwortung.
5. Die Grundlagen des Verfahrens sind theoretisch begründet, so daß man die Grenzen der Leistungsfähigkeit überblicken kann.

Bemerkungen zu dem Begriff „Kritischer Turbulenzgrad“

Von H. St. Stefaniak in München

Bekanntlich führten die Versuche von G. B. Schubauer und H. K. Skramstad¹⁾, welche zur Nachprüfung der Tollmien-Schlichtingschen Theorie der Stabilität der Grenzschicht an der längsangeströmten ebenen Platte durchgeführt wurden, zu einer vorzüglichen Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Bei dieser Gelegenheit wurde eine Meßreihe aufgenommen, bei welcher der Einfluß des mittels Hitzdraht festgestellten Turbulenzgrades $T_H = \bar{u}_H/U_\infty$ auf die Lage $Re_x = U_\infty \cdot x/\nu$ derjenigen Stelle untersucht wurde, von welcher an der Umordnungsprozeß von dem laminaren Strömungsvorgang in den turbulenten einsetzt. (U_∞ = Anströmungsgeschwindigkeit, \bar{u}_H = Wurzel aus dem mittleren Quadrat der mittels Hitzdraht festgestellten turbulenten Zusatzgeschwindigkeiten, x = Lauflänge der Grenzschicht, ν = kinematische Zähigkeit.) Das Bild gibt den Befund wieder. Man erkennt, daß sich die kritische Stelle, falls man von großen und kleinen T_H -Werten fortschreitet, immer weiter stromabwärts verschiebt, und zwar ist die Abhängigkeit $Re_x(T_H)$ sehr gut linear bis herunter zu dem „kritischen Turbulenzgrad“²⁾ $T_H = 0,1\%$. Normalerweise würde man vermuten, daß sich die Gerade, wie gestrichelt eingetragen, bis zu dem Punkt Re_{xk} bei $T_H = 0$ fortsetzt, bei welchem die Grenzschicht beginnen würde, spontan umzuschlagen. Soweit konnte sich aber bei den Versuchen die Grenzschicht nicht entwickeln; denn unterhalb des kritischen Turbulenzpegels knickte die Gerade plötzlich um und verlief ohne Übergang bis $T_H = 0$ in Höhe von $Re_x \approx 2,8 \cdot 10^6$ parallel zur Abszisse.



Einfluß des Turbulenzgrades auf die Lage der Übergangszone in der Grenzschicht an der längsangeströmten ebenen Platte ohne Druckgradient [1]

Wenn man sich die Frage vorlegt, wie man diese Erscheinung deuten kann, so erkennt man als Voraussetzung für einen bis $T_H = 0$ ununterbrochenen geradlinigen Verlauf der Grenzkurve die Tatsache, daß außer der einen, von dem Hitzdraht erfaßten Störung keine weiteren mehr vorhanden sind, welche einen vorzeitigen Umschlag herbeiführen können.

Bei dem Erklärungsversuch, welcher zur Diskussion gestellt werden soll, wird angenommen:

1. Es existiert tatsächlich noch eine zweite Quelle von Störungen, welche von der Hitzdrahtanordnung nicht registriert wird.
2. Diese Störungen lösen auch einen Umschlag aus; jedoch ist der innere Mechanismus, welcher zur Instabilität Anlaß gibt, anderer Art als der bei der Windkanalturbulenz vorhandene.
3. Die Ursache der andersgearteten Störung ist in der thermischen Unruhe zu suchen.

Zur Begründung wurde angeführt:

1. Die Stoßzahlen der Moleküle in der Luft vom Normalzustand liegen in der Größenordnung von 10^9 — 10^{10} 1/s. Es wurde daher die unregelmäßige thermische Bewegung von der Hitzdrahtanordnung, deren Wiedergabebereich sich auf Frequenzen zwischen 1 bis einige 10^3 Hz erstreckte, nicht mit erfaßt.
2. Die spontanen Schwankungen haben endliche Amplitude. Es beginnen daher die sich selbst anfachenden exponentiell ansteigenden Schwingungen bereits mit endlicher Amplitude, so daß diese in der Grenzschicht nach Durchlaufen einer endlichen Wegstrecke einen Umschlag herbeiführen können.
3. Die Hitzdrahtturbulenz hat immer Molekülhaufen zum Träger im Gegensatz zur thermischen Unruhe. Weil ihr Charakter von jener verschieden ist, darf man annehmen, daß auch die durch sie bewirkte Instabilität anderer Art ist, wenn auch die makroskopisch sichtbare Wirkung dieselbe bleibt.

Zusammenfassend folgt aus dem Gesagten, daß außer der durch die Windkanalturbulenz bedingten Stabilitätsgrenze noch eine zweite, von dieser unabhängige — im Bild strichpunktiert eingezeichnet — existiert, welche bei einem endlichen Re_x der weiteren Entwicklung der laminaren Grenzschicht über diese Grenze hinaus ein vorzeitiges Ende setzt.

Bezüglich des Schnittpunktes der beiden Stabilitätskurven (Bild) läßt sich eine Vermutung aussprechen, wenn man die Reynoldsche Zahl der Turbulenz $Re_L = \bar{u}_H \cdot L/\nu$ und diejenige der thermischen Schwankungsbewegungen $Re_t = \bar{c} \cdot l/\nu$ miteinander vergleicht. (L =

¹⁾ G. B. Schubauer und H. K. Skramstad, Laminar-Boundary-Layer Oscillations and Transition on a Flat plate.

²⁾ H. Schlichting, Über die Theorie der Turbulenzentstehung. Forsch. Ing. Wes. 16 (1949/50), S. 72.

die aus Korrelationsmessungen sich ergebende Länge (= scale of turbulence), l = freie Weglänge, \bar{c} = mittlere Geschwindigkeit.) Aus ³⁾ lassen sich für Re_L für die durch ϕ gekennzeichneten Meßpunkte mit einiger Sicherheit die Grenzen $0,7 < Re_L < 6,3$ und als wahrscheinlichsten Wert 2,1 erschließen. Mit $\nu = l\bar{c}/3 \cdot \sqrt{8/(3\pi)}$ errechnet sich der von den Zustandsgrößen des Gases unabhängige Wert $Re_L = \sqrt{27\pi/8} = 3,26$, welcher sich als etwas größer als die Reynolds'sche Zahl der bei den Versuchen vorhandenen unterkritischen Turbulenz erweist. Es liegt daher nahe anzunehmen, daß der „kritische Turbulenzpegel“ durch die Gleichheit von Re_L mit Re_l definiert ist. Aus den angestellten Überlegungen folgt aber, daß zur vollständigen Klärung dieses Phänomens Versuche bei gleich geringem T_H aber verschiedenen L und dann vor allem mit Flüssigkeiten durchgeführt werden müßten; denn die Ableitung, welche zu dem Zahlenwert $Re_l = 3,26$ führte, stützte sich nur auf die kinetische Theorie der Gase.

Berechnung der Schaufelform von Kaplan-Laufrädern bei vorgegebener Geschwindigkeitsverteilung auf der Schaufeloberfläche

Von M. Strscheletzky in Friedrichshafen

Die Umströmung der Laufschaufeln von Kaplan-Turbinen wird durch gewisse gegenseitige Beeinflussung des Laufrades, der Leitvorrichtung und des Saugkrümmers gesteuert. Ist diese Gegenwirkung rechnerisch erfaßt, so entsteht die Aufgabe, die Schaufelform des Laufrades bei vorgegebener Geschwindigkeitsverteilung auf der Schaufeloberfläche zu berechnen.

Die dreidimensionale, wirbelbehaftete Strömung im Arbeitsraum der Turbine läßt sich rechnerisch erfassen, wenn man die Wände des Turbinenhohlraums und die Schaufeloberfläche als Stromflächen reibungsloser Strömung betrachtet, welche unter dem Einfluß von Wirbeln, Quellen und Senken erzeugt wird.

Es seien: $w_0(r, y)$ die lokale Geschwindigkeit der rotationssymmetrischen, wirbelbehafteten Strömung, $v(r, y, \theta)$ die von den gebundenen Wirbeln der Laufschaufeln induzierte Geschwindigkeit, und $\Delta v(r, y, \theta)$ die von den Quellen und Senken der Leitschaufeln erzeugte Geschwindigkeit.

Die lokale Geschwindigkeit $\vec{w}_0 + \vec{v}$ ist zu der Skelettfläche der Schaufel tangential gerichtet. Für genügend dünne und schwach gewölbte Schaufel kann man den Gegeneinfluß der Wölbung und der Schaufeldicke vernachlässigen. Die Umrechnung der an der Skelettfläche auftretenden Geschwindigkeit auf die Oberfläche der Schaufel wird dann nach der angenäherten Methode von Riegels durchgeführt. Die lokale Geschwindigkeit auf der Schaufeloberfläche ist

$$w(x_0) \approx [w_0(x_0) + v(x_0)] \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy_0}{dx_0}\right)^2}} \pm \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy_0}{dx_0}\right)^2}} + \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy_0}{dx_0}\right)^2}} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{w_0(x) + v(x)}{x_0 - x} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx \quad \dots \dots (1).$$

In den Stellen $\pm y_0$ der Druck- bzw. Saugseite der Schaufel, welche dem Aufpunkt x_0 der Skelettlinie im betreffenden Schnitt der Schaufel entsprechen, sind die lokalen Geschwindigkeiten w_d und w_s vorgegeben. Damit ergibt sich aus (1) die lokale Intensität der gebundenen Wirbel

$$\gamma(x_0) \approx (w_s - w_d) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy_0}{dx_0}\right)^2} \quad \dots \dots \dots (2).$$

An Hand von γ ermittelt man die Geschwindigkeit \vec{v} . Da $w(x_0) = \frac{1}{2} (w_s + w_d) \pm \frac{1}{2} (w_s - w_d)$ ist, ergibt sich aus (1) und (2) die Integralgleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{w_s + w_d}{w_0(x_A) + v(x_A)} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy_0}{dx_0}\right)^2} = \frac{w_0(x_0) + v(x_0)}{w_0(x_A) + v(x_A)} + \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{w_0(x) + v(x)}{w_0(x_A) + v(x_A)} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{x_0 - x} \quad (3),$$

³⁾ H. L. Dryden and G. B. Schubauer, The Use of Damping Screens for the Reduction of Wind-Tunnel Turbulence. Journ. Aeron. Sciences 14 (1947), S. 226.

wobei der Index A der Austrittskante entspricht und die Integration längs der betreffenden Stromlinie $\vec{w}_0 + \vec{v}$ auf der unendlich dünnen Skelettfläche der Schaufel durchzuführen ist.

Die Gl. (2) kann man nach verschiedenen Methoden lösen. Im Vortrag wurde ein Iterationsverfahren angeführt, welches die Lösung mittels der von Truckenbrodt errechneten Beiwerte ermöglicht.

Die im Vortrag angeführten Beispiele zeigen, daß der dreidimensionale Charakter der Strömung im Arbeitsraum der Turbine für die Schaufelform von entscheidender Bedeutung ist.

Die Berechnung der Auftriebsverteilung an Pfeilflügeln

Von E. Truckenbrodt in Braunschweig

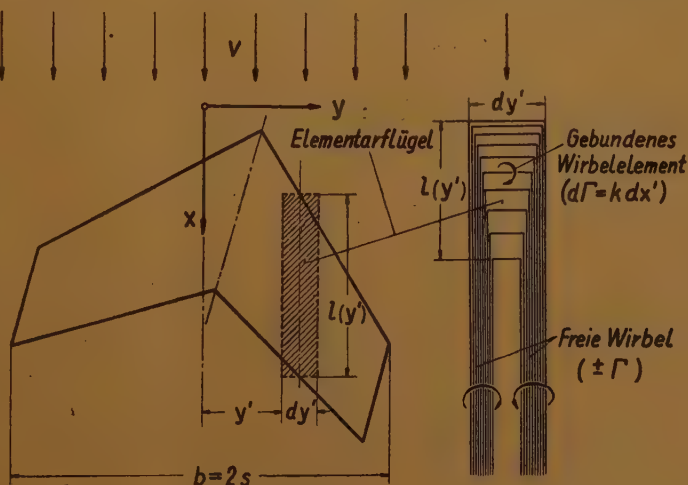
Eine anschauliche Auffassung des Tragflügels erhält man, wenn man ihn aus sogenannten Elementarflügeln, d. h. Flügeln vom Spannweitelement dy' , zusammensetzt. Gezeigt ist eine schematische Darstellung für einen schiebenden Pfeilflügel. Jedem Elementarflügel ist aufgrund der Geometrie des Flügelgrundrisses ein ganz bestimmter Platz im Gesamtverband des Flügels zugeordnet. Es lassen sich mit dem beschriebenen Verfahren Flügel beliebigen Grundrisses, beliebiger Profilwölbung und beliebiger Verwindung längs Spannweite behandeln.

Die Verteilung der Wirbeldichte k längs Flügeltiefe wird aus zwei Anteilen zusammengesetzt. Die erste Verteilung, die Grundverteilung h , entspricht der ersten Birnbaumschen Normalverteilung; sie ist proportional dem Auftriebsbeiwert c_a des Flügelschnittes y' . Die zweite Verteilung, die Nullverteilung h_0 , ergibt sich durch Überlagerung der zweiten Birnbaumschen Normalverteilung mit einer flächengleichen ersten Normalverteilung; sie ist proportional dem Momentenbeiwert c_m des Flügelschnittes y' . Es gilt also für die Verteilung der Wirbeldichte eines Elementarflügels

$$\frac{2}{v} k(x', y') = c_a(y') h(x', y') + c_m(y') h_0(x', y').$$

Unter Anwendung des Biot-Savartschen Gesetzes lassen sich für diese Wirbelverteilung die induzierten Normalgeschwindigkeiten am Ort der Flügelfläche berechnen. Die Bestimmung wird entscheidend vereinfacht durch Verwendung von sogenannten Einflußtafeln $\chi(x, y, y')$ und $\chi_0(x, y, y')$ (entsprechend den vorgegebenen Verteilungen h und h_0). Diese Einflußtafeln sind universell und gelten für alle vorkommenden Flügelgrundrisse.

Die Abwindbedingung, die fordert, daß die aus der Anströmung herrührende Normalgeschwindigkeit entgegengesetzt gleich der vom Wirbelsystem des Flügels induzierten Normalgeschwindigkeit ist, wird wegen der zwei Unbekannten c_a und c_m an zwei Stellen eines jeden Flügelschnittes y' erfüllt. Als besonders charakteristisch haben sich hierfür die Hinterkante und der Einviertelpunkt ergeben.



Damit erhält man zur Bestimmung der Auftriebsverteilung und der Momentenverteilung zwei Integralgleichungen, deren Aufbau der Prandtl'schen Abwindformel ähnlich ist. Hat man die Werte der Einflußfunktionen $\chi(x, y, y')$ und $\chi_0(x, y, y')$ mittels der Einflußtafeln bestimmt, so löst man die beiden Integralgleichungen unter Anwendung der bekannten Verfahren zur Berechnung des Prandtl'schen Abwindintegrals schrittweise. Am geeignetsten hat sich dabei die Multhoppsche Quadraturformel erwiesen.

Zur Theorie der Strömung in Kaplan- und Propellerturbinen.

Von E. Weinel in Jena

Bei der üblichen Berechnung des Strömungsfeldes in Kaplan- und Propellerturbinen sieht man die Strömung in axialen Zylinderschnitten als ebene Gitterströmung an und umgeht auf diese Weise die Schwierigkeiten des dreidimensionalen Problems. Da von Seiten des Strömungsmaschinenbaus immer wieder betont wird, daß eine theoretische Erfassung der räumlichen Strömung notwendig und wünschenswert ist, möchte ich über einige einfache potentialtheoretische Rechnungen berichten, die sich für ein schematisiertes Turbinenmodell (Bild 1 und 2) durchführen lassen.

1. Wir betrachten ein konzentrisches Rohr, das den Arbeitsraum der Turbine idealisieren möge, und einen Wirbelstern, der in erster Näherung die Schaufflung ersetzen soll (Bild 2). Der

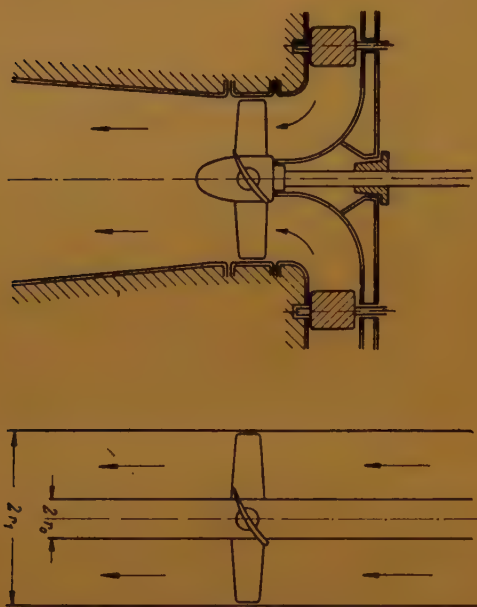


Bild 1

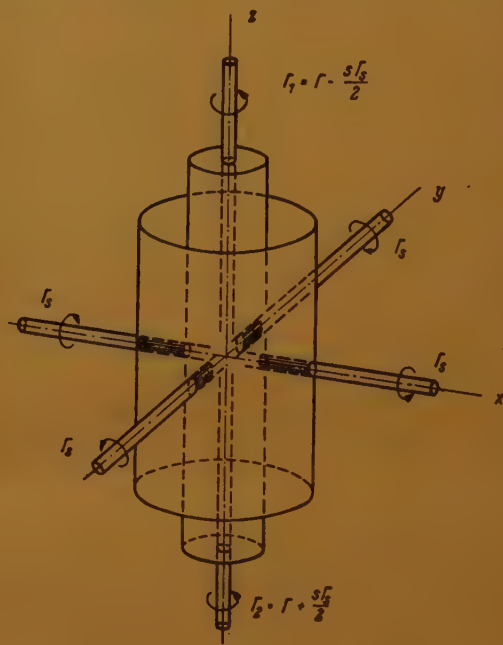


Bild 2

Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{B} = \mathfrak{v}^* + \mathfrak{v}$ setzt sich additiv zusammen aus der durch den Wirbelstern induzierten Geschwindigkeit \mathfrak{v}^* und einer Zusatzgeschwindigkeit \mathfrak{v} , die bewirkt, daß die Zylindermäntel r_0 und r_1 Stromflächen werden.

2. Das Strömungsfeld eines s -strahligen Wirbelsterns ergibt sich unmittelbar aus dem Biot-Savartschen Gesetz. Für die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors \mathfrak{v}^* erhält man in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} v_r^* &= -\frac{s \Gamma_s}{4 \pi r} \mathfrak{X} g \lambda \cdot \frac{\sin s \varphi}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} s \lambda - \cos s \varphi}, \\ v_\varphi^* &= \frac{\Gamma}{2 \pi r} - \frac{s \Gamma_s}{4 \pi r} \cdot \frac{\mathfrak{S} \sin s \lambda}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} s \lambda - \cos s \varphi}, \\ v_z^* &= \frac{s \Gamma_s}{4 \pi r} \frac{1}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda} \cdot \frac{\sin s \varphi}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} s \lambda - \cos s \varphi}. \end{aligned}$$

Hierin ist $\lambda = \mathfrak{X} r \mathfrak{S} \sin(z/r)$, Γ_s bedeutet die Schauffelzirkulation und Γ das arithmetische Mittel aus Eintritts- und Austrittsdrall.

3. Das Strömungspotential Φ der Zusatzströmung wird in Zylinderkoordinaten dargestellt in der Form

$$\Phi(r, \varphi, z) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sin n \varphi \int_0^{\infty} \{A_n(\alpha) J_n(i \alpha r) + B_n(\alpha) Y_n(i \alpha r)\} d\alpha$$

mit den Randbedingungen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} + v_r^* = 0 \quad \text{für } r = r_0 \text{ und } r = r_1.$$

Zur Ermittlung der Funktionen $A_n(\alpha)$ und $B_n(\alpha)$ entwickelt man v_r^* in die Fouriersche Reihe

$$v_r^* = -\frac{s\Gamma_s}{2\pi r} \Im \lambda \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n|\lambda|} \sin n\varphi \quad (n \equiv 0 \pmod{s})$$

und erhält dann vermöge der Randbedingungen die beiden Bestimmungsgleichungen

$$A_n(\alpha) J'_n(i\alpha r_0) + B_n(\alpha) Y'_n(i\alpha r_0) = \frac{s\Gamma_s}{4\pi i\alpha r_0} \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^\infty e^{-n\beta} \cos(r_0 \alpha \sin \beta) d\beta,$$

$$A_n(\alpha) J'_n(i\alpha r_1) + B_n(\alpha) Y'_n(i\alpha r_1) = \frac{s\Gamma_s}{4\pi i\alpha r_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^\infty e^{-n\beta} \cos(r_1 \alpha \sin \beta) d\beta.$$

Die rechts stehenden Integrale vom Typus

$$\int_0^\infty e^{-n\beta} \cos(x \sin \beta) d\beta \quad (n \equiv 0 \pmod{s})$$

werden je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist, entweder durch Schläflische Polynome in Verbindung mit Zylinderfunktionen oder durch Anger-Webersche Funktionen mit imaginärem Argument dargestellt.

Hiermit ist das Geschwindigkeitsfeld vollständig bestimmt. Grobe Überschlagsrechnungen lassen vermuten, daß der Einfluß der Zusatzströmung i. a. nicht sehr erheblich sein wird, so daß eine auf dem Prinzip der tragenden Linie bzw. tragenden Fläche aufgebaute Theorie auch bei Vernachlässigung der Wandeinflüsse bereits einen ersten Einblick in das dreidimensionale Problem vermittelt.

Ausführliche Berichte folgender Vorträge:

- K. K. J a e k e l: Zur Theorie der Profile geringer Dicke und Wölbung.
R. R e i c h h a r d t: Über die Energieversorgung der Wandturbulenz.
R. S a u e r: Fortschritte der Theorie der Überschallströmung seit 1945.
H. W u n d t: Wärmeleitung in pulsierenden Rohrströmungen

werden in den nächsten Heften dieser Zeitschrift erscheinen.

Referate der Vorträge:

- H. L y r a: Zu neueren Problemen der atmosphärischen Strömung über ein Gebirge.
H. S c h u h: Zur Berechnung der turbulenten Grenzschicht bei vorgegebenem Druckverlauf

sind nicht eingegangen.

KLEINE MITTEILUNGEN

Eine Fehlerabschätzung bei der dritten Randwertaufgabe der Potentialtheorie.

Für die 3. Randwertaufgabe der Potentialtheorie wird eine Fehlerabschätzung hergeleitet.

Das Verfahren läßt sich auf allgemeinere elliptische Differentialgleichungen und auf gemischte Randwertaufgaben erweitern.

A. Definitionen

\mathfrak{B} sei ein beschränkter Bereich eines dreidimensionalen reellen euklidischen Raumes.

P sei ein innerer Punkt des Bereiches; verschiedene Punkte werden durch Indizes unterschieden: P_j

Γ sei die stückweise glatte Berandung des Bereiches.

Q sei ein Punkt der Berandung Γ .

ν sei die innere Normale auf der Berandung; $|\nu| = 1$. In Knickstellen der Berandung ist ν eindeutig; dort nehme es die Werte $\nu \in N$ an. Zugelassen

sind solche Knickstellen der Berandung, an denen der von zwei beliebigen Normalen ν_r ; $\nu_s \in N$ eingeschlossene Winkel nicht stumpf ist. Das skalare Produkt (ν_r, ν_s) ist dann nicht negativ.

$u = u(x, y, z) = u(P)$ sei eine skalare reelle zweimal stetig differenzierbare Funktion der Koordinaten x, y, z in \mathfrak{B} .

Auf Γ nehme u die Werte \bar{u} an: $\lim_{P \rightarrow Q} u(P) = \bar{u}(Q)$,

$\bar{u}(Q)$ sei eine beschränkte Funktion auf der Berandung. Partielle Ableitungen werden abgekürzt geschrieben:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y \quad \frac{\partial u}{\partial z} = u_z \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \bar{u}_\nu.$$

B. Aufgabenstellung

Zu der Differentialgleichung in \mathfrak{B} :

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

mit der Randbedingung auf Γ :

$$\bar{u}_v + \alpha \bar{u} = \beta \quad \dots \quad (1)$$

mit $\alpha(Q)$; $\beta(Q)$ als reell gegebenen Funktionen auf Γ , wobei $\alpha < 0$ vorausgesetzt sei, sei eine Näherungslösung $U(P)$ bekannt, die in \mathfrak{B} zweimal stetig differenzierbar ist und der Differentialgleichung $\Delta U = 0$ genügt; dagegen erfülle $U(P)$ die Randbedingung nur genähert:

$$\bar{U}_v + \alpha \bar{U} = \beta^* \quad \dots \quad (2).$$

$\bar{U}(Q)$ sei beschränkt; durch $U(P)$ und $\alpha(Q)$ ist dann die Funktion $\beta^*(Q)$ auf der Berandung Γ definiert. Gesucht wird eine Abschätzung des Fehlers v in $\mathfrak{B} + \Gamma$:

$$v(P) = U(P) - u(P) \quad \dots \quad (3).$$

Hiernach ist $v(P)$ zweimal stetig differenzierbar; es genügt der Differentialgleichung $\Delta v = 0$. Nach (2) ist außerdem $\bar{v}(Q)$ beschränkt.

C. Abschätzung des Fehlers

Wir verwenden bei der Herleitung den Satz (4): Jede Funktion $f(x, y, z)$, die in einem beschränkten Bereich einer gewissen homogenen elliptischen Differentialgleichung 2. Ordnung, z. B. der Potentialgleichung genügt, nimmt ihren größten und ihren kleinsten Wert auf der Berandung des Bereiches an. (Siehe z. B. Collatz: Fehlerabschätzung zur 1. Randwertaufgabe bei elliptischen Differentialgleichungen, Z. angew. Math. Mech. 32 (1952).)

Auf Γ genügt nach (1), (2), (3) die Fehlerfunktion $v(P)$ der Randbedingung:

$$\bar{v}_v + \alpha \bar{v} = (\bar{U} - u)_v + \alpha (\bar{U} - u) = \beta^* - \beta.$$

Aus den bekannten Funktionen α, β, β^* läßt sich eine Funktion $\gamma(Q)$ auf Γ berechnen:

$$\gamma = \frac{\beta^* - \beta}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \bar{v}_v + \bar{v}.$$

Damit lautet unsere Behauptung:

$$\min_{\text{auf } \Gamma} \gamma \leq \min_{\text{in } \mathfrak{B} + \Gamma} v \leq \max_{\text{in } \mathfrak{B} + \Gamma} v \leq \max_{\text{auf } \Gamma} \gamma.$$

D. Beweis

Auf der Berandung Γ nehme die Funktion $\bar{v}(Q)$ ihren größten Wert im Punkt Q_1 an; nach (4) ist dann:

$$v(P) \leq \bar{v}(Q_1); \quad \bar{v}(Q) \leq \bar{v}(Q_1).$$

Notwendige Bedingung dafür ist, daß für die partiellen Ableitungen nach dem Randparameter s , wenn sie im Punkt $Q_1(s_1)$ existieren, gilt:

$$\lim_{\varepsilon} \frac{\bar{v}(s_1 + \varepsilon) - \bar{v}(s_1)}{\varepsilon} \leq 0; \quad \lim_{\varepsilon} \frac{\bar{v}(s_1) - \bar{v}(s_1 - \varepsilon)}{\varepsilon} \geq 0 \quad (5).$$

Auf der Berandung Γ nehme die Funktion $\gamma(Q)$ ihren größten Wert im Punkt Q_2 an:

$$\gamma(Q) \leq \gamma(Q_2).$$

Wir führen unseren Beweis indirekt, indem wir die gegenteilige Annahme widerlegen.

Annahme: Es sei das Maximum von $\bar{v}(Q)$ größer als das Maximum von $\gamma(Q)$:

$$\bar{v}(Q_1) > \gamma(Q_2) \geq \gamma(Q_1) \quad \dots \quad (6).$$

Aus den Definitionen folgt dann:

$$\frac{1}{\alpha} \bar{v}_v(Q_1) = \gamma(Q_1) - \bar{v}(Q_1) < 0 \quad \text{nach (6)}$$

und da nach (1) $\frac{1}{\alpha} < 0$ vorausgesetzt ist, muß sein:

$$\bar{v}_v(Q_1) > 0 \quad \dots \quad (7).$$

Wir treffen nun die Fallunterscheidung:

Fall a): Wenn im Punkt Q_1 die Normale v nicht eindeutig bestimmt ist und das skalare Produkt von zwei möglichen Normalen $(v_r v_e) = 0$ ist, so sind diese Normalen v_r, v_e Tangenten an die Berandung im Punkt Q_1 . Wählen wir als Randparameter z. B. s in Richtung v_r , so ist mit (7) eine Bedingung (5) verletzt und damit unsere Annahme (6) widerlegt.

Fall b): Wenn im Punkt Q_1 die Normale v eindeutig bestimmt ist, oder wenn sie nicht eindeutig bestimmt ist und dann das skalare Produkt von je zwei beliebigen möglichen Normalen $(v_r v_e) > 0$ ist, so weisen diese Normalen in das Innere des Bereiches \mathfrak{B} . Nehmen wir jetzt einen Punkt P_1 an, der vom Punkt Q_1 in Richtung der Normalen um die Strecke ε entfernt im Innern von \mathfrak{B} liegt, so gilt nach (3):

$$v(P_1) = \bar{v}(Q_1) + \varepsilon \bar{v}_v(Q_1) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 v_{vv}(P_2),$$

wobei P_2 ein innerer Punkt der Strecke $\overline{Q_1 P_1}$ ist. Durch hinreichend kleine Wahl von ε ,

$$\varepsilon < 2 \left| \frac{\bar{v}_v(Q_1)}{v_{vv}(P_2)} \right|$$

erreichen wir also, daß

$$v(P_1) > \bar{v}(Q_1)$$

ist im Widerspruch zu Satz (4). Damit ist unsere Annahme (6) widerlegt.

Durch Änderung der Vorzeichen von v und γ läßt sich zeigen, daß Entsprechendes von den Minima gilt. Wir haben damit die behaupteten Fehler-schranken bewiesen:

$$\min \gamma \leq \min v \leq \max v \leq \max \gamma.$$

E. Hinweis auf die Möglichkeit einer Erweiterung des Anwendungsbereiches

a) Bei n -dimensionalen Problemen treten an Stelle der Veränderlichen x, y, z die Veränderlichen x_j ; $j = 1, \dots, n$. Zugelassen sind Bereiche mit stückweise glatter Berandung, die als Unstetigkeiten nur Knickstellen mit der Einschränkung

$$\sum_j v_r^j v_e^j \geq 0$$

hat. Hierin sind v_r^j die n Komponenten der Normalen v_r in der Knickstelle.

b) Die Fehlerabschätzung ist anwendbar allgemeiner bei elliptischen Differentialgleichungen 2. Ordnung der Gestalt:

$$L(u) = \sum_{j,k} a_{jk} u_{x_j x_k} + \sum_j b_j u_{x_j} + c u = 0.$$

Inhomogene Differentialgleichungen können in üblicher Weise durch Subtraktion einer speziellen Lösung hierauf zurückgeführt werden.

Die Koeffizienten der Differentialgleichung unterliegen den Einschränkungen:

$$(a_{jk}) \text{ pos. def., d. h. } \sum_{j,k} a_{jk} v^j v^k > 0 \quad \dots \quad (8),$$

worin v^j die Komponenten eines willkürlichen Vektors sind, und

$$c < 0.$$

Durch $L(u)$ ist auf Γ eine Konormale σ definiert; ihre Komponenten berechnen sich aus den Komponenten der Normalen:

$$\sigma^k = \sum_j a_{jk} v^j.$$

Nach (8) weisen die Konormalen bei glatter Berandung in das Innere des Bereiches:

$$\sum_k \sigma^k v^k = \sum_{j,k} a_{jk} v^j v^k > 0.$$

Allgemein sind Bereiche mit stückweise glatter Berandung zugelassen; die Berandung habe höchstens Unstetigkeiten ihrer Normalen mit der Einschränkung

$$\sum_{j,k} a_{jk} v_j^k v_e^k \geq 0,$$

worin v_j^k die Komponenten der möglichen Normalen in einem Knickpunkt sind.

In der Randbedingung und in der Fehlerabschätzung ist an Stelle der Normalen die Konormale einzuführen. Beim Beispiel der Potentialgleichung ist die Konormale gleich der Normalen.

c) Wenn auf einem Teil des Randes Γ , genannt Γ_1 , als Randbedingung vorgeschrieben ist:

$$\bar{u}(Q) = \delta(Q) \quad \text{für } Q \in \Gamma_1$$

und auf dem übrigen Rand, genannt Γ_2 , die bisherige Randbedingung vorgeschrieben ist:

$$\bar{u}_\nu(Q) + \alpha \bar{u}(Q) = \beta(Q) \quad \text{für } Q \in \Gamma_2,$$

so ist für die Fehlerabschätzung die Funktion $\gamma(Q)$ zu definieren:

$$\gamma(Q) = \delta^*(Q) - \delta(Q) \quad \text{für } Q \in \Gamma_1$$

$$\gamma(Q) = \frac{\beta^*(Q) - \beta(Q)}{\alpha(Q)} \quad \text{für } Q \in \Gamma_2,$$

worin $\delta^*(Q) = \bar{U}(Q)$ definiert ist.

d) Zuletzt noch ein Hinweis auf eine Fehlerabschätzung, wenn auf einem Randteil Γ_2 die partielle Ableitung

$$\bar{u}_\nu(Q) = 0 \quad \text{für } Q \in \Gamma_2$$

vorgegeben ist.

In einigen Sonderfällen des Differentialoperators, z. B. $L(u) = \Delta u$, läßt sich nachweisen, daß die Fehlerfunktion v entweder konstant ist oder ihren größten Wert nicht in einem inneren Punkt $Q \in \Gamma_2$ auf dem Randteil Γ_2 annimmt.

Die Abschätzung läßt sich dann auf die obigen Fälle zurückführen.

F. Ein numerisches Beispiel

Das Problem

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0 & \text{für } |x| < 1, |y| < 1 \\ \{u_\nu - \operatorname{ctg} 1 \cdot u = 0 & \text{für } |x| = 1 \\ u_\nu - u = 0 & \text{für } |y| = 1 \end{aligned}$$

hat die strenge Lösung

$$u = -\frac{1}{e} \cos x \operatorname{Co} y$$

und etwa die harmonische Näherung

$$U = -0,356 + 0,184(x^2 - y^2)$$

Die Fehlerabschätzung ergibt

$$-0,183 \leq U - u \leq 0,063$$

Die strengen Schranken sind

$$-0,0494 \leq U - u \leq 0,0281.$$

Der Fehler wird hier also etwa 3fach überschätzt.

Hannover. H. J. Grüns ch.

Über ein Beispiel aus der Statistik.

Die hier betrachtete Fragestellung kann man kurz so kennzeichnen: X_1, X_2, \dots seien unabhängige nach einer Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Streuung σ^2 verteilte zufällige Variable (kurz: nach $N(0, \sigma^2)$ verteilt). Welche Verteilung hat die Summe der Abweichungen vom Mittelwert $\sum_{i=1}^n X_i$ oder auch die Summe der Fehlerquadrate $\sum_{i=1}^n X_i^2$, wenn ξ unabhängig von den X_i nach einer geometrischen Ver-

teilung mit dem Parameter q verteilt ist, d. h.

$$W(\xi = n) = p^{n-1} q \quad (n = 1, 2, \dots), \quad p + q = 1?$$

Außerdem sollen Fragen der Parameterschätzung für q und auch für σ^2 erörtert werden.

Diese Problemstellung scheint in dieser speziellen Fassung noch nicht behandelt worden zu sein, jedoch sind in der (mir nur unvollkommen zugänglichen) mathematisch-statistischen Literatur Verteilungen des hier betrachteten Typus hinsichtlich gewisser allgemeiner Eigenschaften untersucht^{1) 2)}. Die oben aufgeworfenen Fragen gehen auf Unterhaltungen mit Statistikern der Praxis zurück, worin folgendes äquivalente Problem aufgeworfen wurde: Es laufen zwei Produktionsgänge I und II, die zwar in Wahrscheinlichkeitstheoretischem Sinne als unabhängig angenommen werden können, jedoch in bestimmter Weise miteinander gekoppelt sind³⁾. Die Ergebnisse von I: ξ_1, ξ_2, \dots seien identisch alternativ verteilt mit den Wahrscheinlichkeiten $p, q, p + q = 1$ und etwa $p \gg q$. Der Prozeß II lasse sich charakterisieren durch zufällige Variable X_1, X_2, \dots , welche unabhängig nach $N(0, \sigma^2)$ verteilt sind und es seien weiter ξ_i und X_i aufeinander bezogen. Gefragt wird nach der Ver-

teilung von $x^{(1)} = \sum_{i=1}^n X_i$ oder auch von $x^{(2)} = \sum_{i=1}^n X_i^2$,

wenn n das erstmalige Auftreten des unwahrscheinlicheren Ereignisses in der Reihe der ξ_i anzeigt. Außerdem sei es als untunlich angenommen, den Prozeß I direkt zu beobachten. Es mögen nun eine Reihe von Ergebnissen hinsichtlich der Größen $x^{(1)}$ oder $x^{(2)}$ vorliegen und daraus Schlüsse über die Parameter $q, 0 < q < 1$ oder $\sigma^2, 0 < \sigma^2 < \infty$ gezogen werden, genauer Schätzfunktionen oder Konfidenzintervalle angegeben werden.

1. $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}$ seien unabhängige, zufällige Größen, die einer mit der Dichte $f(x^{(1)})$ verteilten

Gesamtheit entnommen sind. Hierbei ist $x^{(1)} = \sum_{i=1}^m X_i$,

wobei die X_i unabhängig nach $N(0, \sigma^2)$ und die n unabhängig davon geometrisch verteilt sind, so daß $W(n = N) = p^{N-1} q, p + q = 1$.

Wir zeigen: Konsistente Schätzfunktion für q ist:

$$\hat{q} = 2 - \frac{m \sum_{i=1}^m (x_i^{(1)})^4}{\left(\sum_{i=1}^m x_i^{(1)2} \right)^2} \dots \dots (1).$$

Hierzu sei bemerkt: Die Verteilung von $x^{(1)}$ ist durch

$$f(x^{(1)}) = \frac{q}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n-1}}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^{(1)2}}{2n\sigma^2}} - \infty < x^{(1)} < \infty \quad (2)$$

gegeben. Damit fängt man nicht viel an, doch erhält man leicht für die charakteristische Funktion

$$\varphi^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x^{(1)}) e^{i x^{(1)} t} dx^{(1)} = \frac{q e^{-\frac{t^2 \sigma^2}{2}}}{1 - p e^{-\frac{t^2 \sigma^2}{2}}} \quad (3),$$

¹⁾ Feller, On a General Class of „Contagious“ Distributions, Ann. Math. Statistics 14 (1943), p. 339—400, zit. in Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications I. New York — London 1950.

²⁾ Robbins, The asymptotic distribution of the sum of a random number of random variables. Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), S. 1161—1161.

³⁾ Es wurde z. B. die Frage aufgeworfen, ob es möglich sei, die Wahrscheinlichkeit für Stockungen in einer Strangmaschine bei der Zigarettenherzeugung an dem unschwer festzustellenden Ausschuß zwischen je zwei Stockungen zu schätzen. Tatsächlich besitzen jedoch die modernen Maschinen dieser Art stets Zähl-einrichtungen so daß eine direkte Schätzung ebenso leicht durchführbar ist.

so daß man für $f(x^{(1)})$ auch

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q e^{-\frac{t^2 \sigma^2}{2}}}{1 - p e^{-\frac{t^2 \sigma^2}{2}}} e^{-itx^{(1)}} dt$$

erhält.

Natürlich ist $E(x^{(1)}) = 0$ und

$$E(x^{(1)2}) = \frac{\sigma^2}{q} \dots \dots \dots (4'),$$

$$E(x^{(1)4}) = \frac{3\sigma^4}{q^2} (1+p) \dots \dots \dots (4''),$$

wie man sofort durch Differentiation von (3) oder kürzer durch Aufsuchen der Koeffizienten von t^2 bzw. t^4 in der Potenzreihenentwicklung von (3) findet.

Sei $\bar{x}^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^{(1)}}{m}$. Dann ist $E(\bar{x}^{(1)}) = 0$ und nach (4')

$E(\bar{x}^{(1)2}) = \frac{\sigma^2}{qm}$. Es ist zwar prinzipiell möglich vermöge (3) die Verteilung von $\bar{x}^{(1)}$ aufzuschreiben, aber für die praktische Verwertbarkeit bei der Parameterschätzung kommt dieser Ausdruck kaum in Frage. Aus eben diesem Grunde dürfte sich auch die Verwendung des Maximum Likelihood Prinzips verbieten.

Nimmt man zunächst an, daß σ^2 bekannt ist, bleibt als letztes Auskunftsmittel immer noch die Tschebyscheffsche Ungleichung: Sei $0 < \alpha < 1$ vorgegeben: Es ist

$$W(|\bar{x}^{(1)}| \leq \frac{\sigma}{\sqrt{mq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}) \geq \alpha$$

und daraus erhält man zu vorgegebenem Konfidenz-koeffizient $\geq \alpha$ ein Vertrauensintervall für q :

$$0 \leq q \leq \frac{\sigma^2}{\bar{x}^{(1)2} m (1-\alpha^2)}.$$

Für hinreichend großes m und bekanntes σ^2 erledigen sich die Fragen der Schätzung von q natürlich durch den Grenzwertsatz.

Um für q und σ^2 Schätzfunktionen zu gewinnen, kann man ausgehend von der Pearsonschen Momentenmethode etwa so verfahren: Es ist nach (4') und (4'')

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^m x_i^{(1)2}}{m}\right) = \frac{\sigma^2}{q} \dots \dots \dots (5''),$$

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^m x_i^{(1)4}}{m}\right) = \frac{3\sigma^4}{q^2} (2-q) \dots \dots \dots (5').$$

Nach bekannten Sätzen konvergiert daher $\frac{\sum_{i=1}^m x_i^{(1)2}}{m}$

stochastisch gegen $\frac{\sigma^2}{q}$ und $\frac{\sum_{i=1}^m x_i^{(1)4}}{m}$ gegen $\frac{3\sigma^4}{q^2} (2-q)$. Aber auch jede rationale Funktion dieser Größen konvergiert nach Slutsky stochastisch gegen die entsprechende Funktion der Grenzwerte⁴⁾.

Führt man also durch

$$\frac{\sum x^{(1)2}}{m} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{q}}$$

und

$$\frac{\sum x^{(1)4}}{m} = \frac{3\hat{\sigma}^4}{\hat{q}^2} (2-\hat{q})$$

Schätzfunktionen $\hat{\sigma}^2$ und \hat{q} ein, dann ist

$$(2-\hat{q})3 = \frac{m \sum x^{(1)4}}{(\sum x^{(1)2})^2}$$

und damit schon erwiesen, daß (1) konsistente Schätzfunktion für q ist. Wir verzichten darauf den Ausdruck für $\hat{\sigma}^2$ hinzuschreiben.

2. Es ist klar, daß die Fragestellung für nach (2) verteilte Gesamtheiten größere praktische Bedeutung hat, als wenn man die Verteilung von $x^{(2)}$ zu Grunde legt. Es zeigt sich jedoch, daß man die Untersuchung dieses Falles (insbesondere nach Anbringung einer leichten Modifikation) unter Heranziehung schon längst bekannter Prüfverteilungen durchführen kann. Weiterhin sei σ^2 als bekannt angenommen, etwa $\sigma^2 = 1$.

Es seien also die Größen X_i unabhängig nach $N(0,1)$ verteilt und n davon unabhängig geometrisch und es wird die Größe $x^{(2)} = \sum_{i=1}^n X_i^2$ betrachtet. Für ihre Verteilung ergibt sich:

$$f(x^{(2)}) = \begin{cases} \frac{qp}{2} \left[\frac{e^{-x^{(2)}/2}}{\sqrt{\pi}} (x^{(2)}b)^{-1/2} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{b}{\pi}} e^{(b-1/2)x^{(2)}} \int_0^{x^{(2)}} \frac{e^{-bt}}{\sqrt{t}} dt + \right. \\ \left. + e^{(b-1/2)x^{(2)}} \right]; x^{(2)} > 0 \left(b = \frac{p^2}{2} \right) \\ 0; x^{(2)} < 0 \end{cases} \quad (6).$$

Die charakteristische Funktion ist

$$\varphi^{(2)}(t) = q \frac{\sqrt{1-2it+p}}{(1-p^2-2it)} \dots \dots \dots (7)$$

der Mittelwert $E(x^{(2)}) = \frac{1}{q}$, die Streuung

$$E\left(x^{(2)} - \frac{1}{q}\right)^2 = \frac{2-p}{q^3}.$$

Hierzu beachte man: Da die X_i unabhängig nach $N(0,1)$ verteilt sind, ist $x^{(2)} = \sum_{i=1}^n X_i^2$ bei festem n bekanntlich nach Helmert-Pearson mit n Freiheitsgraden verteilt. Dies liefert für die Dichte von $x^{(2)}$, wenn nun n unabhängig von den X_i als geometrisch verteilt angenommen wird:

$$f(x^{(2)}) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{(2)^{n/2-1} e^{-x^{(2)}/2}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} p^{n-1} q & x^{(2)} > 0 \\ 0 & x^{(2)} < 0 \end{cases} \quad (8).$$

Die Übereinstimmung von (6) und (8) folgt leicht aus der Bemerkung, daß

$$y = e^{-x/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(xb)^{n/2-1}}{\Gamma(n/2)} - \frac{e^{-x/2} (xb)^{-1/2}}{\Gamma(1/2)}$$

wegen $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}-1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)$ der einfachen

Differentialgleichung genügt:

$$y' = e^{-x/2} \frac{(xb)^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} + \left(b - \frac{1}{2}\right) y \dots \dots \dots (9).$$

⁴⁾ Vgl. Cramér, Mathematical Methods of Statistics, Princeton 1946, p. 255.

Löst man (9) unter der Bedingung, daß das von 0 bis ∞ erstreckte Integral über (8) den Wert 1 erhält, ergibt sich (9).

Es sei erwähnt, daß man $F(x) = \int_0^x f(z^{(2)}) dz^{(2)}$ leicht numerisch berechnen kann, wenn eine Tafel für die unvollständige Gammafunktion für die Parameter $1/2$ und 1 vorliegt sowie eine Tafel für das Gaußsche Fehlerintegral und die Dichte der Normalverteilung.

Wegen $E(e^{iX_k^2}) = \frac{1}{\sqrt{1-2it}}$ erhält man (7) sofort
aus $\varphi^{(2)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(1-2it)^3}} p^{n-1} q$.

Liegt nun eine Stichprobe vom Umfange m hinsichtlich der Größe $x^{(2)}$ vor, d. h. m unabhängige nach (6) verteilte Größen $x_1^{(2)}, \dots, x_m^{(2)}$, dann kann man bei Verzicht auf die Kenntnis von (1) jedenfalls wieder mittels der Tschebyscheffschen Ungleichung Vertrauensgrenzen für q gewinnen.

Man kann jedoch mehr im Anschluß an die heute üblichen Prüfverfahren Parameterschätzung vornehmen, wenn man die Zuordnung zwischen den Prozessen I und II etwas abändert. Hierzu setze man den ersten Produktionsgang wie oben voraus, für den Prozeß II seien die Variablen X_1, X_2, \dots unabhängig nach $N(0, 1)$ verteilt und jedem ξ_k aus I seien jetzt zwei Variable X_{2k-1}, X_{2k} zugeordnet. Die Fragestellung heißt also jetzt zunächst: Wie lautet die Verteilung von $2n$ Fehlerquadraten, deren Variable unabhängig nach $N(0, 1)$ verteilt sind, wenn n davon unabhängig geometrisch verteilt ist?

Es ist ganz einfach zu zeigen, daß unter diesen Voraussetzungen $x = \sum_{i=1}^{2n} X_i^2$ nach

$$g(x) = \begin{cases} \frac{q}{2} e^{-\frac{px}{2}} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \dots (10)$$

verteilt ist.

Weiterhin hat nun x nur noch die hier festgelegte Bedeutung.

Um (9) zu bestätigen, bemerke man nur, daß $g(x)$ für $x > 0$ durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-x/2} x^{n-1}}{2^n \Gamma(n)} p^{n-1} q = q \cdot \frac{e^{-x/2}}{2} - e^{-\frac{x}{2}} = \frac{q}{2} e^{-\frac{x}{2}}$$

gegeben ist.

$g(x)$ ist also eine Pearson-Typ III-Verteilung, somit qx nach Helmer-Pearson mit 2 Freiheitsgraden verteilt. Dies darf vielleicht deswegen gewisses Interesse des Statistikers beanspruchen, weil sozusagen bei der Beobachtung von x im Mittel eine große Zahl von Freiheitsgraden „verlorengehen“. Man hat ja im Mittel $2/q$ Beobachtungen zu erwarten, um den aufgetretenen Wert von x zu erhalten.

Es soll nun eine Stichprobe vom Umfange m von Größen x_1, \dots, x_m vorliegen, die alle nach (10) verteilt sind. Für die Verteilung von

$$\zeta = x_1 + \dots + x_m$$

erhält man wegen der Reproduktionseigenschaft von (10) sofort:

$$\left(\frac{q}{2}\right)^m \frac{\zeta^{m-1}}{\Gamma(m)} e^{-\frac{q\zeta}{2}} \dots \dots (11).$$

Wie man leicht kontrolliert, erhält man dieselbe Verteilung auch dadurch, daß man die Summen $\sum_{i=1}^{2n} X_i^2$

betrachtet und die Anzahl der Summanden n nach einer (etwas modifizierten) Pascalschen Verteilung

unabhängig von den X_i verteilt ansieht, für die den Merkmalen $0, 1, \dots, m-1$ die Wahrscheinlichkeit 0 zukommt. Dies muß so sein, da sich die so definierte Pascalsche Verteilung als Summenverteilung von m unabhängigen der hier betrachteten geometrischen Verteilungen ergibt.

Um nun Konfidenzgrenzen für q zu gewinnen, steht eine Reihe von Möglichkeiten offen, die auf bekannten Prüfverteilungen beruhen und nur kurz gestreift werden sollen:

a) Der Vollständigkeit halber erwähnen wir auch hier die Tschebyscheffsche Ungleichung.

$$\text{Sei } \bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_m}{m}, \text{ also}$$

$$E(\bar{x}) = \frac{2}{q}, \quad E\left(\bar{x} - \frac{2}{q}\right)^2 = \frac{4}{mq^2} \dots (12).$$

Ein Vertrauensintervall für q zum Koeffizienten $\geq \alpha$ ($0 < \alpha < 1$) wird somit

$$\frac{2}{\bar{x}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m(1-\alpha)}}\right) \leq q \leq \frac{2}{\bar{x}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{m(1-\alpha)}}\right).$$

b) Engere Konfidenzgrenzen sind zu erwarten, wenn man (11) heranzieht und χ_1, χ_2 so wählt, daß

$$\frac{1}{\Gamma(m)} \cdot \frac{1}{2^m} \int_{\chi_1}^{\chi_2} t^{m-1} e^{-t/2} dt = \alpha.$$

Dann erhält man aus $W(\chi_1 \leq q \leq \chi_2) = \alpha$ oder $W\left(\frac{\chi_1}{m\bar{x}} \leq q \leq \frac{\chi_2}{m\bar{x}}\right) = \alpha$ ein Konfidenzintervall zum Koeffizienten α .

Für großes m ist $\frac{q\zeta - 2m}{2\sqrt{m}}$ asymptotisch nach $N(0, 1)$ verteilt und daraus erhält man ein asymptotisches Vertrauensintervall

$$\frac{2}{\bar{x}} \left(1 - \frac{d}{\sqrt{m}}\right) \leq q \leq \frac{2}{\bar{x}} \left(1 + \frac{d}{\sqrt{m}}\right)$$

aus

$$W\left(-d \leq \frac{q\zeta - 2m}{\sqrt{2m}} \leq d\right) = \alpha,$$

wenn

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d}^d e^{-t^2/2} dt = \alpha.$$

d geht wesentlich langsamer gegen ∞ für $\alpha \rightarrow 1$ als $\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$. (Für $\alpha = \frac{95}{100}$ gilt z. B. $d = 1,96$ und für den Wert aus a) $\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} = 4,47$).

c) Die in b) erhaltenen asymptotischen Konfidenzintervalle sind auch die asymptotisch besten, wie man erkennt, wenn man die Likelihood-Funktion der Stichprobe x_1, \dots, x_m heranzieht, d. h.

$$L(q) = \left(\frac{q}{2}\right)^m e^{-\frac{(x_1 + \dots + x_m)q}{2}} \dots \dots (13)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial q} = \frac{m}{q} - \frac{m\bar{x}}{2}, \quad E\left(\frac{1}{m} \frac{\partial \log L}{\partial q}\right) = 0.$$

Weiter ist

$$E\left(\frac{1}{m} \frac{\partial \log L}{\partial q}\right)^2 = -\frac{1}{m^2}, \quad E\left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial q^2}\right) = \frac{1}{mq^3}.$$

Bekanntlich ist aber $\frac{1}{m} \frac{\partial \log L}{\partial q} / \frac{1}{q\sqrt{m}}$ asymptotisch nach $N(0, 1)$ verteilt. Dies liefert natürlich für $m \rightarrow \infty$ dieselben Konfidenzgrenzen wie in b).

Von (13) ausgehend kann man im Anschluß an Cramér⁵⁾ für jedes m gültige Konfidenzgrenzen für q gewinnen.

Das Maximum Likelihood-Prinzip liefert nämlich die Schätzfunktion $\hat{q} = 2/\bar{x}$. Vermöge (11) rechnet man leicht nach:

$$E(\hat{q}) = \frac{mq}{m-1}, \quad \text{d. h. } q_0 = \frac{2(m-1)}{m\bar{x}}$$

ist unverfälscht.

Für die Streuung erhält man:

$$E(q_0 - q)^2 = \frac{q^2}{m-2} (m \geq 3).$$

Aus (11) gewinnt man durch Einführung der neuen Variablen $z = 1/\bar{x}$ die Verteilung von $1/\bar{x}$. Betrachtet man nun die standardisierte Variable

$$v = \frac{2(m-1) - qm\bar{x}}{qm\bar{x}} \sqrt{m-2},$$

dann ergibt sich nach leichter Rechnung die folgende parameterfreie Verteilung:

$$h(v) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m)} \frac{[(m-1)(m-2)]^m}{(v + \sqrt{m-2})^{m+1}} e^{-\frac{(m-1)\sqrt{m-2}}{v + \sqrt{m-2}}} & -\sqrt{m-2} < v < +\infty \\ 0 & v < -\sqrt{m-2} \end{cases} \quad m \geq 3 \quad (14).$$

Nun wähle man $v_1, v_2 > -\sqrt{m-2}$ und so, daß $\int_{v_1}^{v_2} h(v) dv = \alpha$. Dann erhält man aus $W(v_1 \leq v \leq v_2) = \alpha$ das folgende Konfidenzintervall für q zum Koeffizienten α :

$$\frac{2(m-1)\sqrt{m-2}}{m\bar{x}(v_1 + \sqrt{m-2})} \leq q \leq \frac{2(m-1)\sqrt{m-2}}{m\bar{x}(v_2 + \sqrt{m-2})}.$$

3. Bekanntlich kann man die Poisson-Verteilung als Grenzverteilung Pascalscher Verteilungen gewinnen. Wir wollen dies zum Anlaß nehmen, um noch ähnliche Fragen wie eben zu streifen: X_i seien unabhängige nach $N(0,1)$ verteilte Größen, n sei davon unabhängig nach einer Poisson-Verteilung verteilt mit $W(n=0) = 0$ und dem Parameter a . Gefragt ist die Verteilung der Summe einer geraden Anzahl von Fehlerquadraten:

$$y = \sum_{i=1}^{2n} X_i^2.$$

Man erhält:

$$f(y) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{k-1} e^{-y/2}}{2^k \Gamma(k)} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} e^{-a} = \frac{e^{-a-y/2}}{2} I_0\left(\sqrt{\frac{ay}{2}}\right) & y > 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} \quad (15),$$

wobei I_0 wie üblich die Bessel-Funktion rein imaginären Arguments bezeichnet.

Die charakteristische Funktion für die hier betrachtete Poisson-Verteilung ist durch

$$e^{-a} e^{it} e^{a e^{it}}$$

gegeben, also erhält man für die Fouriertransformierte von (15):

$$e^{-a} \frac{1-2it}{a} e^{-a} \dots \dots \dots (16).$$

Daraus:

$$E(y) = 2(1+a), \quad E(y - 2(1+a))^2 = 4(1+2a).$$

⁵⁾ L. o. ⁴⁾ p. 505.

y_1, \dots, y_m sei eine Stichprobe aus der nach (15) verteilten Gesamtheit. Für die Schätzung von a bei kleinem m stehen z. B. folgende zwei Wege zur Verfügung:

Für $a \rightarrow \infty$ ist nach Robbins²⁾ y asymptotisch nach $N(2(1+a), 4(1+2a))$ verteilt, also kann für hinreichend großes a $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_m}{m}$ mit

$N\left(2(1+a), \frac{4}{m}(1+a)\right)$ verteilt angenommen werden.

Für kleines $a > 0$ steht jedenfalls wieder die Tschebyscheffsche Ungleichung zur Verfügung.

Die Kenntnis von (15), (16) und damit von der exakten Verteilung für \bar{y} dürfte für Zwecke der Schätzung von a nicht von Belang sein.

Wien.

L. Schmetterer.

Eine graphische Richtungsfeldkonstruktion für den Phasenplan nichtlinearer freier Schwingungen.

Da für nichtlineare Schwingungen — es soll sich dabei um Systeme mit einem Freiheitsgrad handeln — im allgemeinen keine Aussicht auf eine geschlossene Integration der beschreibenden Differentialgleichung $\ddot{x} - f(x, \dot{x}) = 0$ besteht, so begnügt man sich vielfach mit einer qualitativen Diskussion des Vorganges im „Phasenplan“. Hier wird in einem cartesischen Koordinatensystem die Geschwindigkeit $\dot{x} = y$ in Abhängigkeit vom Ausschlag x (anstatt von der Zeit t) betrachtet, so daß die Differentialgleichung der „Phasenkurven“ $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}$ lautet.

Diese Behandlungsweise wird als „topologische Methode“ bezeichnet. Wie man nun unmittelbar erkennt, entsprechen den singulären Punkten des Phasenplans $y = f(x, 0) = 0$ (verschwindende Geschwindigkeit und Beschleunigung), die also auf der x -Achse liegen, die Gleichgewichtslagen des Systems (deren Stabilität oder Instabilität mit dem geometrischen Charakter der Phasenkurven in der Nachbarschaft der Singularitäten zusammenhängt), während einer geschlossenen Phasenkurve ein periodischer Schwingungsvorgang, oder einer spiralförmigen Phasenkurve eine gedämpfte bzw. angefachte Schwingung entspricht. Für einen orientierenden Überblick über die Gesamtheit der Phasenkurven (Phasenplan) und damit über den Schwingungsverlauf bei allen möglichen Anfangsbedingungen im Falle einer allgemeinen Dämpfungsfunktion $\varphi(x)$ und einer linearen Rückstell (Feder-)kraft hat sich die graphische Konstruktion für das Richtungsfeld der Phasenkurven von A. Liénard eingebürgert¹⁾. Im folgenden wollen wir eine andere und, wie uns scheint, recht einfache Konstruktion für den viel allgemeineren Fall einer nichtlinearen Rückstellkraft und eines kombinierten Dämpfungsgesetzes angeben. Ergänzend seien hierzu noch die Verfahren von H. Heinrich²⁾ und W. Richter³⁾ erwähnt, die als Hilfsmittel Nomogramme benötigen; es ist indessen fraglich, ob für den vorliegenden Zweck dieser Aufwand lohnt. Ferner sei für den Fall erzwungener Schwingungen, wo auf der rechten Seite der Differentialgleichung eine explizit zeitabhängige Funktion steht, etwa auf das Verfahren von E. Braun⁴⁾ hingewiesen.

¹⁾ A. Liénard: Etude des oscillations entretenues. Rev. Gén. d'Elect., 1928. — Vgl. hierzu die modernen Werke über nichtlineare Schwingungen; etwa J. J. Stoker: Nonlinear Vibrations. Interscience Publishers, Inc., New York 1950.

²⁾ H. Heinrich: Ein abbildungsgeometrisches Verfahren zur Darstellung von Richtungsfeldern und zur Erzeugung von Tangentenverwandtschaften. Dtsch. Math. Bd. 8 (1938), S. 353—389.

³⁾ W. Richter: Bestimmung der Spiegelbewegung in einem Wasserschloß mittels nomographischer Hilfsmittel. Ing.-Archiv Bd. 11 (1940), S. 437—450.

⁴⁾ E. Braun: Über die graphische Lösung der Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen bei beliebigem Gesetz für Dämpfung, Rückstellkraft und Antriebskraft. Ing.-Archiv Bd. 8 (1937), S. 198—202.

Wir befassen uns zunächst mit Schwingungsgleichungen vom Typus

$$\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + F(x) = 0 \quad [F(x) = \alpha^2 x + b x^2 + \dots] \quad (1a)$$

Die der Rückstellkraft proportionale Funktion $F(x)$ wird bei den Anwendungen meist durch ein Polynom approximiert oder ist eine Kreisfunktion. Als Dämpfungsfunktionen können vorkommen die abschnittsweise analytischen Funktionen $\varphi(\dot{x}) = (\operatorname{sgn} \dot{x}) \cdot r$ (Coulombsche (trockene) Reibung), $\varphi(\dot{x}) = (\operatorname{sgn} \dot{x}) \cdot r \dot{x}^2$ (quadratische Dämpfung durch Luftwiderstand) oder bei selbsterregten Schwingungen z. B. $\varphi(\dot{x}) = -\alpha^2 \dot{x} + \beta^2 \dot{x}^3$ (Anfachung bei kleinen, Dämpfung bei großen Geschwindigkeiten). Wird in (1a) $\dot{x} = y$ gesetzt, so hat man für das Richtungsfeld der Phasenkurven die Beziehung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\varphi(y) - F(x)}{y} \quad (1b.)$$

Die singulären Punkte S ($y = 0$) sind durch $-F(x) = \varphi(0)$ bestimmt.

Zur Ausführung der Konstruktion (vgl. Bild 1), für die sich die Verwendung von Millimeterpapier empfiehlt, werden vorerst die „Grundkurven“ $y = -F(x)$ und $y = \varphi(x)$ eingetragen (am einfachsten mit der gleichen Zeicheneinheit für beide Koordinatenachsen). Dem zweckmäßig im Schnittpunkt zweier Netzgeraden des Millimeterpapiers gewählten jeweiligen Feldpunkt $P_{11}(x_1, y_1)$ wird die „Trägergerade“ (Netzgerade) $x = y_1$ zugeordnet, welche die φ -Kurve in Q_1 schneide. Die Netzgerade $x = x_1$ durch P_{11} schneide die F -Kurve in R_1 . Durch Projektion von Q_1 auf die y -Achse erhält man als Fußpunkt den „Pol“ Y_1 , durch Projektion von R_1 auf die Trägergerade den Fußpunkt X_{11} . Die Richtung der Verbindungsgeraden $\overline{Y_1 X_{11}}$ ist dann gleich der gesuchten örtlichen Feldrichtung. Das ist unmittelbar aus Bild 1 abzulesen, da $\overline{Q_1 X_{11}} = -F(x_1) - \varphi(y_1)$ und $\overline{Y_1 Q_1} = y_1$.

Will man sich nun ein genügend dichtes Richtungsfeld verschaffen, so faßt man alle Punkte $P_{\lambda 1}$ mit gleicher Ordinate y_1 zusammen, denen der gleiche Pol Y_1 und die gleiche Trägergerade $x = y_1$ zu-

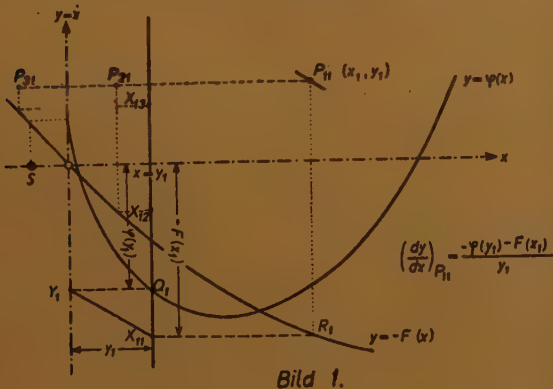


Bild 1.

geordnet sind. Beim Übergang zu Punkten $P_{\lambda \mu}$ mit gleicher Ordinate y_μ ist im wesentlichen nur der neue Pol Y_μ zu ermitteln, während man die Punkte $X_{\mu \lambda}$ durch Herüberloten der bereits bekannten Punkte $X_{1 \lambda}$ auf die neue Trägergerade $x = y_\mu$ sofort bekommt.

Wir gehen nun zu Differentialgleichungen von der allgemeineren Form

$$\ddot{x} + G(x) \cdot \varphi(\dot{x}) + F(x) = 0 \quad (2a)$$

über, bei denen also Größe und Vorzeichen des Dämpfungsgliedes außer von der Geschwindigkeit auch vom Ausschlag abhängig sind. Von praktischer Bedeutung ist allerdings bislang wohl nur der Fall $\varphi(\dot{x}) = \dot{x}$; ist ferner z. B. $G(x) = -\alpha^2 + 3\beta^2 x^2$, so hat man es wiederum mit selbsterregten Schwingungen

zu tun. Hingegen ist der Fall $\varphi(\dot{x}) = (\operatorname{sgn} \dot{x}) \cdot \dot{x}^2$ hier von untergeordnetem Interesse, da er sich mit elementaren Mitteln erledigen läßt: die Substitution $\dot{x}^2 = z$ führt auf die lineare Differentialgleichung $\frac{1}{2} \frac{dz}{dx} \pm G(x)z + F(x) = 0$, und eine zusätzliche

Quadratur liefert $t = t(x)$.

Setzt man in (2a) $\dot{x} = y$, so ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-G(x) \cdot \varphi(y) - F(x)}{y} \quad (2b.)$$

Die singulären Punkte S sind durch $-F(x) = G(x) \cdot \varphi(0)$ gegeben; ist insbesondere $\varphi(0) = 0$, so sind sie die Nullstellen von $F(x)$. Der Richtungsfeldkonstruktion (vgl. Bild 2) dienen als Grundbestandteile die Kurven $y = -F(x)$, $y = G(x)$, $x = \varphi(y)$

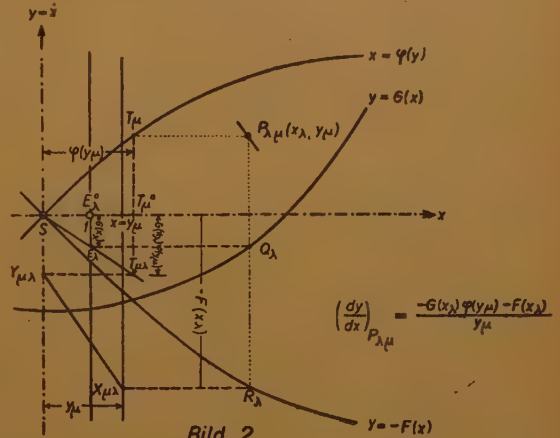


Bild 2.

und die Ordinatenparallele $x = 1$ (Zeicheneinheit). Als jeweiliger Feldpunkt $P_{\lambda \mu}(x_\lambda, y_\mu)$ empfiehlt sich natürlich wieder ein Knotenpunkt des Millimeternetzes. Dann schneide die Netzgerade $x = x_\lambda$ die G -Kurve in Q_λ und die F -Kurve in R_λ , die Netzgerade $y = y_\mu$ die φ -Kurve in T_μ . Durch Projektion von Q_λ auf die Ordinatenparallele $x = 1$ erhält man den Fußpunkt E_λ , durch Projektion von R_λ auf die Trägergerade $x = y_\mu$ den Fußpunkt $X_{\mu \lambda}$. Verbindet man den Ursprung O mit E_λ , so schneidet die Verbindungsgerade die Ordinatenparallele durch T_μ , die im Spezialfall $\varphi(\dot{x}) = \dot{x} = y$ mit der Trägergeraden zusammenfällt, im Punkt $T_{\mu \lambda}$ (dessen Lage übrigens auch im allgemeinen Fall leicht zu schätzen ist). Bestimmt man noch durch Projektion von $T_{\mu \lambda}$ auf die y -Achse den Fußpunkt $Y_{\mu \lambda}$, so stimmt die örtliche Feldrichtung in $P_{\lambda \mu}$ mit der Richtung von $\overline{Y_{\mu \lambda} X_{\mu \lambda}}$ überein. Nach dem Strahlensatz ist nämlich (vgl. Bild 2)

$$\overline{E_\lambda E_\lambda} : \overline{O E_\lambda} = \overline{T_\mu T_{\mu \lambda}} : \overline{O T_\mu}$$

oder

$$\overline{O Y_{\mu \lambda}} = \overline{T_\mu T_{\mu \lambda}} = G(x_\lambda) \cdot \varphi(y_\mu),$$

womit die Konstruktion auf die des Gleichungstyps (1) zurückgeführt ist.

Ist speziell $F(x) = \omega_0^2 x$:

$$x + \varphi(x) + \omega_0^2 x = 0, \dots \dots \dots (3),$$

so sei angemerkt, daß sich der Sonderfall $\varphi(\dot{y}) = \dot{y}$ der Gleichungsform (2a):

$$\ddot{y} + \Phi(y) \dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad (4)$$

sofort auf (3) zurückführen läßt; denn substituiert man $y = \dot{x}$:

$$\ddot{x} + \Phi(\dot{x}) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

so liefert, wenn $\varphi(\dot{x}) = \int_0^{\dot{x}} \Phi(\zeta) d\zeta$ gesetzt wird, die

Integration in der Tat

$$\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + \omega_0^2 x = 0 \quad (3).$$

(Die Integrationskonstante c kann Null gesetzt werden da die Differentialgleichung die Transformation $x + c = \bar{x}$ zuläßt; dies bedeutet physikalisch, daß der Ruhelage der Nullausschlag zugeordnet wird.) Die formale Analogie darf jedoch nicht übersehen lassen, daß es sich bei $x(t)$ und $y(t)$ natürlich um verschiedenartige Schwingungsabläufe handelt. Die Differentialgleichung (3) ist aber bequemer zu diskutieren als die entsprechende (4), was nicht immer ausgenutzt wird. In dem von Liénard graphisch behandelten Spezialfall (3) tritt bei unserer Konstruktion noch die Vereinfachung ein, daß die Koordinaten der Punkte $X_{\mu\lambda}$ auf der Trägergeraden durch $x = y_{\mu}$, $y = -x_{\lambda}$ unmittelbar gegeben sind. Ist in (4) z. B. $\Phi(y) = -\alpha^2 + 3\beta^2 y^2$, so liegt die bekannte van der Pol'sche Gleichung vor.

Durch die dargelegten Verfahren kann man einerseits einen raschen Überblick über die möglichen Schwingungstypen erzielen, andererseits aber auch genauer diejenigen Schwingungen konstruieren, für die man sich im besonderen interessiert.

Göttingen.

Manfred Schäfer.

Der Energietransport in strömenden Medien

Jede Strömung eines flüssigen oder gasförmigen Mediums ist mit einem Energietransport verbunden. In der Elektrodynamik hat sich seit langem zur Darstellung des Energietransportes im elektromagnetischen Feld der Poynting'sche Vektor eingebürgert. In der Strömungslehre fehlt, soweit dem Verfasser bekannt ist, ein analoger Vektor. Nur für den Sonderfall der reibungsfreien Flüssigkeit mit konservativen, zeitunabhängigen Massenkräften wurde ein solcher Vektor hergeleitet¹⁾.

Es soll im folgenden, zunächst für reibungsfreie, inkompressible Strömungen, ein Energietransportvektor \mathfrak{E} nach einer Methode hergeleitet werden, die eine Erweiterung auf beliebige Strömungen eines zähen und kompressiblen Mediums zuläßt.

Ist $d\sigma$ der Vektor eines beliebigen, raumfesten Flächenelementes, so soll:

$$dE = \mathfrak{E} \cdot d\sigma dt \quad (1),$$

die im Zeitelement dt durch die Fläche $d\sigma$ transportierte Energie der Strömung bedeuten. Damit ist auch die Bedeutung des Energietransportvektors festgelegt.

Wir wollen uns im folgenden grundsätzlich auf die mechanischen Energieformen beschränken. Es sind dies die Bewegungsenergie der strömenden Flüssigkeit und die potentielle Energie der Massenkräfte. Dazu tritt noch die mechanische Arbeit, die beim Durchtritt durch $d\sigma$ in der Zeit dt von der durchströmenden Flüssigkeit nach außen geleistet wird²⁾.

Es ist demnach, wenn v der Vektor der Strömungsgeschwindigkeit, ρ die Massendichte, p der statische Druck und U das auf die Masseneinheit bezogene (zeitunabhängige) Potential der Massenkräfte bedeutet:

$$\begin{aligned} dE &= \left(\frac{\rho}{2} |v|^2 + \rho \cdot U \right) v \cdot d\sigma dt + p d\sigma \cdot v dt \\ &= \left(\frac{p}{\rho} + \frac{|v|^2}{2} + U \right) \rho v \cdot d\sigma dt. \end{aligned}$$

¹⁾ Vgl. O. Schäfer, Einführung in die theoretische Physik, Berlin und Leipzig 1929, I. Bd., S. 796 ff.

²⁾ Der Punkt bedeutet das skalare Produkt.

³⁾ Eine strenge Herleitung des Energietransportvektors für den allgemeinen Fall der zähen, kompressiblen Flüssigkeit aus den Stokes-Navier'schen Gleichung soll als Ergänzung dieses Aufsatzes folgen.

Durch Vergleich mit Gl. (1) folgt daraus:

$$\mathfrak{E} = \left(\frac{p}{\rho} + \frac{|v|^2}{2} + U \right) \rho v \quad (2).$$

Bei der reibungsfreien, inkompressiblen Strömung hat also der Energietransportvektor dieselbe Richtung wie der Geschwindigkeits- oder der Impulsvektor und man erhält ihn, wenn man den auf die Volumseinheit bezogenen Impulsvektor mit dem Betrag der Gesamtenergie pro Masseneinheit multipliziert.

Der Energietransport durch eine geschlossene Fläche ist gegeben durch: $\oint_F \mathfrak{E} \cdot d\sigma dt$. $d\sigma$ soll nach außen weisen. Bezieht man ihn auf die Volums- und Zeiteinheit und schnürt die Fläche auf einen Punkt zusammen, so erhält man:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_F \mathfrak{E} \cdot d\sigma dt}{V dt} = \nabla \cdot \mathfrak{E}.$$

Man erhält also die Divergenz des Energietransportvektors.

Aus der Eulerschen Gleichung der Hydrodynamik in Verbindung mit der Lamb'schen Umformung des substantiellen Differentialquotienten folgt aber:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - v \times (\nabla \times v) = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{|v|^2}{2} + U \right) \quad (3).$$

Aus Gl. (2) folgt ferner:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathfrak{E} &= \nabla \cdot \left(\frac{p}{\rho} + \frac{|v|^2}{2} + U \right) \cdot \rho v \\ &\quad + \left(\frac{p}{\rho} + \frac{|v|^2}{2} + U \right) \nabla \cdot (\rho v). \end{aligned}$$

Da aber $\rho = \text{const.}$ vorausgesetzt wird, ist

$$\nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (3a).$$

Es folgt somit aus Gl. (3):

$$\nabla \cdot \mathfrak{E} = \left[-\frac{\partial v}{\partial t} + v \times (\nabla \times v) \right] \cdot (\rho v).$$

Nun ist aber:

$$[v \times (\nabla \times v)] \cdot \rho v = 0.$$

Daher gilt:

$$\nabla \cdot \mathfrak{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho |v|^2}{2} \right) \quad (4).$$

Die aus dem raumfesten Volumenelement pro Zeit- und Volumseinheit austretende Energie entspricht also der Verminderung der auf die Volumseinheit bezogenen Bewegungsenergie in der Zeiteinheit. Die potentielle Energie kann keine Änderung erfahren, da das Potential als zeitunabhängig vorausgesetzt wurde. Bei stationärer Strömung ändert sich die Energie natürlich nicht.

Geht man zu zähen Flüssigkeiten über und nimmt zunächst noch $\rho = \text{const.}$ an, dann lautet bekanntlich der Spannungstensor p , der dem Stokes-Navier'schen Ansatz zu Grunde liegt:

$$p = -\mathfrak{S} p + \eta (\nabla \cdot v + v, \nabla) \quad (5).$$

\mathfrak{S} bedeutet den Einheitstensor, der Beistrich soll das dyadische Produkt andeuten, η ist die dynamische Zähigkeit. Die Arbeit, die beim Durchsetzen des Flächenelementes $d\sigma$ in der Zeit dt nach außen geleistet wird, ist dann:

$$dA = - (p \cdot d\sigma) \cdot v dt \quad (6).$$

Aus (5) ergibt sich aber:

$$dA = p v \cdot d\sigma dt - [\eta (\nabla \cdot v + v, \nabla)] \cdot d\sigma dt.$$

Wegen der Symmetrie der Dyade $\nabla, \mathbf{v} + \mathbf{v}, \nabla$ gilt nun:

$$(\nabla, \mathbf{v} + \mathbf{v}, \nabla) \cdot d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dt = (\nabla, \mathbf{v} + \mathbf{v}, \nabla) \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} dt$$

und daher:

$$dA = [p \mathbf{v} - \eta (\nabla, \mathbf{v} + \mathbf{v}, \nabla) \cdot \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{v} dt \quad (6a).$$

Die mechanische Energie dE , die durch die Fläche $d\sigma$ während dt transportiert wird, ist demnach:

$$dE = \left(\frac{\rho}{2} |\mathbf{v}|^2 + \rho U \right) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} dt + dA. \quad (7),$$

wenn wieder ein zeitunabhängiges Potential der Massenkraft vorausgesetzt wird.

Aus (6a) und (7) folgt:

$$dE = \left[\left(\frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + U \right) \rho \mathbf{v} - \eta (\nabla, \mathbf{v} + \mathbf{v}, \nabla) \cdot \mathbf{v} \right] \cdot d\mathbf{v} dt$$

und daher nach Gl. (1):

$$\mathfrak{S} = \left(\frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + U \right) \rho \mathbf{v} - \eta \nabla \cdot (\nabla, \mathbf{v} + \mathbf{v}, \nabla) \dots (8).$$

Der Energietransportvektor hat nun im allgemeinen nicht mehr die Richtung der Stromlinientangente, sondern schließt mit ihr einen von Null verschiedenen Winkel ein.

Bildet man wieder die Divergenz von \mathfrak{S} , so erhält man für $\eta = \text{const}$

$$\nabla \cdot \mathfrak{S} = \nabla \cdot \left(\frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + U \right) \cdot \rho \mathbf{v} - \eta \nabla \cdot [\nabla \cdot (\nabla, \mathbf{v} + \mathbf{v}, \nabla)] \quad (9).$$

Nun lautet die Stokes-Naviersche Gleichung in Vektorform:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \\ = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla U + \nu \Delta^2 \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

mit

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \dots (10a).$$

Führt man Gl. (10) in (9) ein, so erhält man:

$$\nabla \cdot \mathfrak{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho |\mathbf{v}|^2}{2} \right) + \eta \nabla \cdot \nabla^2 \mathbf{v} - \eta \nabla \cdot [\nabla \cdot (\nabla, \mathbf{v} + \mathbf{v}, \nabla)].$$

Man kann nun folgende Umformung ausführen:

$$\nabla \cdot [\nabla \cdot (\nabla, \mathbf{v} + \mathbf{v}, \nabla)] = (\nabla, \mathbf{v}) \cdot (\nabla, \mathbf{v} + \mathbf{v}, \nabla) + \mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v},$$

wobei die Beziehung $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ beachtet werden muß (\cdot bedeutet das doppeltskalare Produkt der beiden Dyaden). Daher folgt:

$$\nabla \cdot \mathfrak{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho |\mathbf{v}|^2}{2} \right) - \eta (\nabla, \mathbf{v}) \cdot (\nabla, \mathbf{v} + \mathbf{v}, \nabla) \quad (11).$$

Zum Verlust an Bewegungsenergie tritt nun noch die Energiedissipation pro Raum- und Zeiteinheit vom Betrag:

$$\eta (\nabla, \mathbf{v}) \cdot (\nabla, \mathbf{v} + \mathbf{v}, \nabla).$$

Man überzeugt sich leicht, daß diese Formel mit den in den Lehrbüchern angegebenen Formeln für die Energiedissipation übereinstimmt⁴⁾.

Betrachten wir z.B. die Poiseuillesche Strömung in einem zylindrischen Rohr ohne Massenkraft, so gilt für die Geschwindigkeitsverteilung, wenn x in Richtung der Rohrachse gelegt wird, bekanntlich:

$$v_x = \frac{g \mathfrak{S}^*}{4 \nu} (a^2 - r^2) \dots (12).$$

Hier ist \mathfrak{S}^* das konstante Gefälle, g die Fallbeschleunigung, a = Rohrdurchmesser, r = Abstand von der Rohrachse. Sind e_x und e_r die Einheitsvektoren in Richtung von x und in Richtung des Aufpunktradius, so gilt nach Gl. (8):

$$\mathfrak{S} = e_x \rho v_x \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v_x^2}{2} \right) - \eta e_r v_x \frac{\partial v_x}{\partial r}.$$

Führt man die Werte aus Gl. (12) ein, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S} = e_x \frac{g \mathfrak{S}^*}{4 \nu} (a^2 - r^2) \left[p + \frac{\rho g^2 \mathfrak{S}^{*2} (a^2 - r^2)^2}{32 \nu^2} \right] \\ + e_r \frac{\eta g^2 \mathfrak{S}^{*2}}{8 \nu^2} r (a^2 - r^2) \end{aligned} \right\} \quad (13).$$

Es besteht also nicht nur eine Energieströmung in Richtung der Flüssigkeitsströmung, sondern auch eine radial nach außen gerichtete Komponente des Energietransportvektors. Diese Radialkomponente besitzt

ein Maximum für $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Im Gebiet $0 < r < \frac{a}{\sqrt{3}}$

strömt demnach radial nach außen mehr Energie ab als von innen zuströmt, im Gebiet $a > r > \frac{a}{\sqrt{3}}$ ist es

umgekehrt. Die Zone $a > r > \frac{a}{\sqrt{3}}$ wird also ständig

von der energiereicheren Zone $0 < r < \frac{a}{\sqrt{3}}$ gespeist.

Bei reibungsfreien, kompressiblen Strömungen wird der Energietransportvektor nach wie vor durch Gl. (2) dargestellt, da die Kompressibilität weder die durch das Flächenelement hindurchtretende potentielle und kinetische Energie, noch die dabei nach außen geleistete Arbeit ändert. Die Divergenz von \mathfrak{S} , die die Energieabnahme eines raumfesten Volumenelementes bezogen auf die Volums- und Zeiteinheit mißt, nimmt hier allerdings eine andere Form an. Bei veränderlicher Dichte kann man schreiben:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \frac{p}{\rho} + \frac{p}{\rho^2} \nabla \rho \dots (14).$$

Ferner gilt die allgemeine Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \dots (15).$$

An Stelle von Gl. (3) tritt somit:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \frac{p}{\rho^2} \nabla \rho = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + U \right).$$

Man erhält sodann:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathfrak{S} = \rho \mathbf{v} \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - \frac{p}{\rho^2} \nabla \rho \right) \\ + \left(\frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + U \right) \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (14) und (15) läßt sich dieser Ausdruck umformen zu:

$$\nabla \cdot \mathfrak{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho |\mathbf{v}|^2}{2} + \rho U \right) + p (\nabla \cdot \mathbf{v}) \dots (16)$$

⁴⁾ Vgl. H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig und Berlin 1931, S. 654 ff.

Die Energieabnahme setzt sich also zusammen aus der Abnahme der kinetischen und potentiellen Energie und der Abnahme zufolge der Volumsdilatation. Die letztere bleibt auch in stationärem Zustand bestehen, da hierbei eine thermodynamische Umsetzung stattfindet, bei der sich die mechanische Energie ändert.

Liegt ein kompressibles und zähes Medium vor, so tritt zum Spannungstensor Gl. (5) noch ein Glied, das von der Kompressibilität herrührt:

$$p = -\mathfrak{S} p + \eta (\nabla \cdot v + v, \nabla) - \lambda \mathfrak{S} (\nabla \cdot v) \quad (17).$$

Nach der Stokes'schen Annahme ist $\lambda = \frac{2}{3} \eta$. Da diese Annahme problematisch ist, wollen wir sie im folgenden nicht einführen. Für \mathfrak{S} ergibt sich nun folgender Ausdruck:

$$\mathfrak{S} = \left(\frac{p}{\rho} + \frac{|v|^2}{2} + U \right) \rho v - \eta v \cdot (\nabla \cdot v + v, \nabla) + \lambda v (\nabla \cdot v) \quad (18).$$

Auch hier ist \mathfrak{S} wieder gegen die Stromlinien geneigt.

Nach der allgemeinen Gleichung von Stokes-Navier, die auch die Kompressibilität berücksichtigt, gilt statt Gl. (10):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \left(\frac{|v|^2}{2} \right) - v \times (\nabla \times v) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla U + \nu \nabla^2 v + \left(\nu - \frac{\lambda}{\rho} \right) \nabla (\nabla \cdot v) \quad (19).$$

Mit Benutzung von Gl. (14) und (15) können wir daraus wieder die Divergenz von \mathfrak{S} ermitteln. Es ergibt sich:

$$\nabla \cdot \mathfrak{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho |v|^2}{2} + \rho U \right) + p (\nabla \cdot v) - \eta (\nabla \cdot v) \cdot (\nabla \cdot v + v, \nabla) + \lambda (\nabla \cdot v)^2 \quad (20).$$

Außer den in Gl. (16) aufscheinenden Gliedern erhält man noch den der Energiedissipation durch Reibung entsprechenden Term nach Gl. (11), und ein von der Kompression herrührendes dissipatives Glied.

Wien.

G. Heinrich.

Zur Beurteilung empirischer Funktionen.

Wenn man die Vereinbarkeit einer empirischen Kurve mit einer theoretischen Kurve beurteilen will, bedient man sich gewöhnlich der Pearsonschen χ^2 -Methode. Da der Ausdruck χ^2 eine Summenbildung der Quadrate der Abweichungen zwischen der empirischen und der theoretischen Kurve darstellt, hat die Methode Mängel, die recht störend wirken¹. Einmal ist die χ^2 -Methode unempfindlich gegen das Vorzeichen der Unterschiede zwischen den beiden Kurven. Zum anderen gestattet sie keine Prüfung auf reine Zufallsmäßigkeit der Unterschiede. In einem Fall, in dem zwischen der empirischen und der theoretischen Kurve rein zufallsmäßige Unterschiede auftreten, liefert sie denselben Übereinstimmungsgrad wie in einem Fall mit systematisch sich verändernden Unterschieden, sofern der Ausdruck χ^2 in beiden Fällen denselben numerischen Wert liefert. Außerdem ist die

χ^2 -Methode auch nur für empirische Kurven geschaffen, die als Häufigkeitsverteilungen angesehen werden können. Die folgenden Betrachtungen mögen dazu beitragen, die aufgezeigte Lücke schließen zu helfen.

Haben wir irgendeinen Vorgang, etwa einen naturwissenschaftlichen oder wirtschaftlichen Vorgang, nach einem fortlaufenden Argument wie z. B. nach der Zeit beobachtet und einen „Trend“ ausfindig gemacht, dann wollen wir fragen, ob die Unterschiede zwischen dem Trend und dem empirisch beobachteten Ablauf reine Zufallsschwankungen sind oder eine nicht zu vernachlässigende systematische Komponente enthalten. Wir können die Frage auch anders stellen und danach fragen, wie klein eine künstliche Klasseneinteilung des Beobachtungs-Argument-Abschnitts gewählt werden darf, damit die Unterschiede zwischen Trend und empirischem Ablauf noch als Zufallsabweichungen angesehen werden dürfen. Der Trend selbst soll uns dabei nicht mehr interessieren, sondern nur noch die Unterschiede zwischen empirischer Funktion und Trend, die wir als Zufallsvariable y betrachten wollen.

Zufallsvariable mit ganzzahligem Argument. Wir gehen zunächst von einer Zufallsvariablen y aus, die nach einem ganzzahligen Argument i beobachtet sein möge. Die aufeinander folgenden Beobachtungen seien $y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$. Der Erwartungswert des einzelnen y_i , den wir mit $E(y_i)$ bezeichnen wollen, soll sich systematisch mit i verändern dürfen. Die in y_i enthaltene Zufallskomponente sei eine Zufallsvariable z_i , die unabhängig von i sein möge. Der Erwartungswert $E(y_i)$ und die reine Zufallsvariable z_i sollen sich additiv zusammensetzen, so daß

$$y_i = E(y_i) + z_i.$$

Das einzelne z_i möge sich aus unendlich vielen Teilvariablen additiv zusammensetzen, so daß die z_i -Verteilung eine Gaußverteilung (Normalverteilung) ist. Die Teilvariablen und mit ihnen die z_i seien unabhängig voneinander. Es soll ein Kriterium entwickelt werden, das zu prüfen gestattet, ob die Beobachtungsreihe der y_i noch mit der Hypothese reiner Zufallsmäßigkeit vereinbar ist.

Falls reine Zufallsmäßigkeit herrscht, wäre $E(y_i) = 0$ für alle i , und alle Rohkorrelationen zwischen den y_i wären gleich Null: $R(y_i, y_j) = 0$ für $i \neq j$. Falls hingegen keine reine Zufallsmäßigkeit herrscht, wären nicht alle Rohkorrelationen $R(y_i, y_j)$ gleich Null. Nach den gemachten Voraussetzungen sind alle $R(y_i, y_{i+m})$ bei gleichem m einander gleich. Die Rohkorrelationen $R(y_i, y_{i+m})$ sind praktisch natürlich durch ihre empirischen Repräsentanten

$$Z_m = \frac{1}{N-m} \sum_i z_i z_{i+m}$$

zu ersetzen. Es dreht sich dann praktisch darum, die Frage zu entscheiden, ob die z_m sämtlich mit dem Wert Null vereinbar sind oder nicht.

Unter den oben gemachten Voraussetzungen sind wegen

$$R(z_i \cdot z_j, z_k \cdot z_l) = R(z_i, z_k) \cdot R(z_j, z_l) + R(z_i, z_l) \cdot R(z_j, z_k)$$

alle $R(Z_m, Z_n)$ für $m \neq n$ gleich Null, und das Streuungsquadrat von Z_m ist

$$\sigma^2(Z_m) \approx \frac{Z_0^2}{N-m}.$$

Da die Z_m , ebenso wie die z_i , einer Gaußverteilung folgen, wird die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die normierten Variablen

$$\frac{Z_1}{\sigma(Z_1)}, \frac{Z_2}{\sigma(Z_2)}, \frac{Z_3}{\sigma(Z_3)}, \dots, \frac{Z_{N-1}}{\sigma(Z_{N-1})}$$

¹ Vgl. Mittmann, O., Erbblologische Fragen in mathematischer Behandlung, Walter de Gruyter, Berlin 1940, Kap. III, Abschn. A1 b 7, S. 148.

bestimmte Werte annehmen, dann einfach gleich

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{N-1}}} e^{-\frac{1}{2}Q} \quad \text{mit} \quad Q = \frac{1}{Z_0^2} \sum_{m=1}^{N-1} (N-m) Z_m^2.$$

Die erzeugende Funktion der auf den Punkt Null bezogenen Momente von Q lautet

$$E(e^{tQ}) = (1-t)^{-(N-1)};$$

die Verteilung von Q ist die χ^2 -Verteilung. Speziell ist der Erwartungswert $E(Q) = N-1$ und das Streuungsquadrat $\sigma^2(Q) = 2(N-1)$. Bei Benutzung der Pearsonschen χ^2 -Tabelle ist zu beachten, daß die Zahl der „Freiheitsgrade“ hier gleich $N-1$ ist.

Zufallsvariable mit stetigem Argument. Wir gehen nun zu einer Zufallsvariablen $y(x)$ über, deren Werte sich nach einem stetigen Argument x ändern und im Intervall von $x=0$ bis $x=1$ vorliegen mögen. An Stelle von Z_m bilden wir jetzt den Ausdruck

$$Z_\lambda = \frac{1}{1-\lambda} \int_0^{1-\lambda} y(x) y(x+\lambda) dx$$

mit $0 \leq \lambda < 1$. Teilen wir das Intervall von $x=0$ bis $x=1$ in K gleichlange Teilintervalle (Klassen), so ist das Streuungsquadrat von Z_λ entsprechend

$$\sigma^2(Z_\lambda) \approx \frac{Z_0^2}{K(1-\lambda)},$$

und Q erhält nun die Gestalt

$$Q = \frac{K}{Z_0^2} \sum_{\lambda} (1-\lambda) Z_\lambda^2 \approx \frac{K(K-1)}{Z_0^2} \int_0^1 (1-\lambda) Z_\lambda^2 d\lambda.$$

Bei unbestimmter Klassenanzahl K können wir K so bestimmen, daß Q mit der Hypothese reiner Zufallsmäßigkeit noch vereinbar ist. Wir benutzen hierbei die Tatsache, daß die χ^2 -Verteilung bei großer Zahl der Freiheitsgrade in eine Gaußverteilung übergeht. Wir brauchen nunmehr bloß zu fragen, wann

$$|Q - E(Q)| = c \cdot \sigma(Q) \quad \text{mit} \quad c \approx 2 \text{ bis } 3.$$

Da $E(Q) = K-1$ und $\sigma^2(Q) = 2(K-1)$, ergibt sich der gesuchte K -Wert aus der Gleichung

$$\frac{K(K-1)}{Z_0^2} \int_0^1 (1-\lambda) Z_\lambda^2 d\lambda - (K-1) = c \sqrt{2(K-1)}.$$

Setzen wir $K = J^2 + 1$ und schreiben zur Abkürzung

$$S = \int_0^1 (1-\lambda) Z_\lambda^2 d\lambda,$$

so kommen wir zur kubischen Gleichung

$$J^3 + J \cdot \left(1 - \frac{Z_0^2}{S}\right) - c \sqrt{2} \frac{Z_0^2}{S} = 0,$$

woraus wir, wenn wir zur Abkürzung $a = 1 - \frac{Z_0^2}{S}$ und

$b = -c \sqrt{2} \frac{Z_0^2}{S}$ schreiben, sofort als Lösung erhalten

$$J = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}},$$

falls

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 > 0,$$

und $J = 2 \sqrt[3]{\frac{a}{3}} \cdot \cos \frac{\alpha}{3}$ mit $\cos \alpha = -\frac{b}{2 \sqrt[3]{\frac{a}{3}}}$,

falls

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 < 0.$$

Wählen wir eine Klassenanzahl, die kleiner als die vorstehend durch J berechenbare ist, dann ist die Annahme reiner Zufallsmäßigkeit vertretbar. Das Streuungsquadrat der Klasseneinhalte ist hier dasselbe wie das mittlere Fehlerquadrat der Klasseneinhalte. Wählen wir dagegen eine Klassenanzahl, die größer als die vorstehend durch J berechenbare ist, dann darf die systematische Komponente gegenüber der Zufallskomponente nicht vernachlässigt werden. Das Streuungsquadrat der Klasseneinhalte ist dann nicht dasselbe wie das den Math. Statistiker interessierende mittlere Fehlerquadrat.

Göttingen.

Otfried M. J. Mittmann.

BUCHBESPRECHUNGEN

W. Nowacki (ao. Prof. a. d. Universität Bern) *Fouriersynthese von Kristallen und ihre Anwendung in der Chemie*. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Naturwissenschaften. Chemische Reihe Bd. VI.) 237 S. m. 120 Abb. Basel 1952. Verlag Birkhäuser. Preis brosch. 30,15 Fr., geb. 34,30 Fr.

Die mehrdimensionale Fouriersynthese von Kristallen ist eine der Methoden zur Berechnung der Parameter einer Kristallstruktur. Sie soll mittels vorliegender experimenteller Daten die Elektronendichte in einer Elementarzelle bestimmen. Außer dem kurz vorher erschienenen Buch von Booth ist das vorliegende das einzige, das Theorie und Praxis dieser Verfahren behandelt. Es ist aus einer Vorlesung des Verfassers hervorgegangen. Die Leser dieser Zeitschrift wird vor allem der zweite Teil des Buches interessieren, in dem die Rechenhilfsmittel für die Durchführung einer solchen Synthese besprochen werden. Hier werden zunächst die verschiedenen Streifenmethoden behandelt, ferner die Verwendung von Lochkarten, weiter die von mechanischen Rechenmaschinen und endlich die von elektromechanischen und

elektronischen Rechenhilfsmitteln. Für alle diese Verfahren sind eine Reihe verschiedener Methoden vorgeschlagen, die hier sämtlich erläutert werden. Es folgen die optischen Methoden und, ganz kurz, die Verwendung von Mikrowellen zur Strukturbestimmung. Die von de Beaulclair berechneten Phasenfaktorentafeln und die sonstigen von ihm vorgeschlagenen Verfahren sind noch nicht berücksichtigt. Ausführliche Literaturverzeichnisse am Anfang eines jeden Abschnittes erleichtern die eingehendere Beschäftigung mit den einzelnen Methoden. Ein Tabellenverzeichnis, ein Namenregister, ein Sachregister und ein Substanzregister machen das Buch auch zum Nachschlagewerk geeignet.

Dresden.

Willers.

Prof. Dr. W. H. Westphal, *Physikalisches Wörterbuch*. Zwei Teile in einem Band, VII + 831 + 795 S. mit 1595 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952. Springer-Verlag. Preis geb. 148,— DM.

Das vorliegende Wörterbuch soll das vor ungefähr zwanzig Jahren von Berliner und Scheel herausgege-

bene ersetzen. Als Benutzer ist an Physiker gedacht, die sich über Fragen orientieren wollen, die nicht in ihr Spezialgebiet fallen, ferner an Mathematiker, Ingenieure und Chemiker. Die einzelnen Artikel sind so abgefaßt, daß sie eine erste Übersicht geben und in vielen Fällen die Heranziehung von Spezialliteratur überflüssig machen. Abgesehen davon, daß selbstverständlich die Fortschritte der Physik seit dem Erscheinen jenes Handwörterbuches berücksichtigt sind — ist doch z. B. die eigentliche Kernphysik erst seit jener Zeit entstanden — sind in dem neuen Buch die physikalische Chemie, die Astrophysik, in gewissem Umfang auch die Geophysik und die Biophysik berücksichtigt; ferner ist das aus der Mathematik aufgenommen, was der Physiker laufend gebraucht. Um den Umfang des Bandes nicht allzugroß werden zu lassen, hat man sich im wesentlichen auf die Grundlagenforschung beschränkt und die angewandte Physik nur soweit berücksichtigt, wie es ihrer Bedeutung für die Grundlagenforschung entspricht.

80 Wissenschaftler haben sich an der Arbeit beteiligt. Der Stoff ist in rund 10 500 Stichworte gegliedert. Dazu kommen drei Anhänge, die eine kurze Geschichte der Physik, eine Zusammenstellung der Lebensdaten von Physikern, auch von noch lebenden, und Tabellen wichtiger Konstanten usw. enthalten. Man muß dem Herausgeber dankbar sein, daß er sich der Mühe der endgültigen Überarbeitung und der Abstimmung der einzelnen Artikel auf einander unterzogen hat. Es scheint mir das gut gelungen zu sein. Das bei der Fülle des Stoffes einige Versehen vorkommen, ist nicht zu vermeiden. Stichproben haben z. B. folgende Kleinigkeiten ergeben: Die Formeln für die Koeffizienten der Newtonschen Interpolationsformel sind nicht richtig. Bei der Figur zum Newtonschen Näherungsverfahren ist von einem Punkt ausgegangen, bei dem die Vorzeichen von $f(x)$ und $f''(x)$ nicht gleich sind, so daß die Konvergenz nicht gesichert ist. Bei den Rollkurven ist die Abbildung der Kardioiden falsch. In dem Artikel über Winkelgeschwindigkeit sind in Abb. 3 die Vektoren falsch eingezeichnet. Das Bild des Poincaré-Ellipsoids ist schlecht. Bei den Potenzreihen wird im Reellen aus der Konvergenz für $x = x_1$ auf die für $|x| \leq |x_1|$, also auch für $-x_1$ geschlossen; im Komplexen wird dieser Fehler nicht gemacht. In Bd. II S. 699 Spalte 2 Zeile 5 muß es heißen $x_{k+1} = \dots = x_{k+l} = x_b$. Aber das sind gegenüber dem vielen Ausgezeichneten, was das Buch bietet, unbedeutende Kleinigkeiten. Jedenfalls ist in dem physikalischen Wörterbuch für Physiker und Wissenschaftler der Nachbargebiete ein außerordentlich wertvolles Hilfsmittel geschaffen worden, das allgemein begrüßt und viel benutzt werden wird.

Dresden.

Willers.

J. P. den Hartog (Professor am Mass. Inst. of Technology) u. **G. Mesmer** (Professor a. d. Techn. Hochschule Darmstadt.) *Mechanische Schwingungen*. Zweite Auflage. XVI + 427 S. mit 299 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952. Springer-Verlag. Preis geb. 42,— DM.

Die deutsche Erstauflage des Buches, die im Jahre 1936 erschienen war, hatte großen Anklang gefunden, da Verf. es versteht, auch bei komplizierteren Vorgängen den Leser auf anschauliche Art in die wesentlichsten Zusammenhänge einzuführen. Es wird dabei zwar nicht ein höherer theoretischer Überblick vermittelt, aber in den meisten Fällen ein einfacher Rechnungsweg gefunden, der für die praktische Schwingungstechnik zu befriedigenden Ergebnissen führt. Insbesondere haben wohl auch die zahlreichen Anwendungsbeispiele und Aufgaben dazu beigetragen, dem Buch in weiteren Kreisen Freunde zu verschaffen. Nachdem inzwischen die dritte amerikanische Auflage erschienen war, wird nunmehr vom Bearbeiter und Übersetzer eine zweite deutsche Auflage vorgelegt,

wobei infolge Zeitmangel der sehr anschaulich geschriebene amerikanische Originaltext im wesentlichen beibehalten worden ist. Es ist zu erwarten, daß auch die neue Auflage großen Anklang finden wird.

Dresden.

H. Neuber.

H. Ziegler (Prof. a. d. ETH. Zürich). *Mechanik*, Bd. III. *Dynamik der Systeme* (Lehr- und Handbücher der Ingenieurwissenschaften Nr. 7.) 396 S. mit 191 Abb. Basel 1952. Verlag Birkhäuser. Preis geb. 46,80 schw. fr.

Der vorliegende dritte Band der Sammlung Mechanik, der von den Professoren E. Meissner und H. Ziegler gemeinsam herausgegeben wurde, behandelt die Dynamik der Systeme (bzw. des Punkthaftens). Band I behandelte die Statik der starren Flüssigkeiten und elastischen Körper und erschien im Jahre 1948; Band 2 behandelte die Dynamik der starren Körper und erschien im Jahre 1947. Bei der Behandlung der Dynamik der Systeme stellt Verf. entsprechend der modernen Auffassung die Lagrangeschen Gleichungen in den Vordergrund (Nach dem Vorwort gehören die Lagrangeschen Gleichungen an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, an der der Verf. als Professor der technischen Mechanik tätig ist, zum allgemeinen Rüstzeug des heutigen Ingenieurs). Im 1. Kapitel wird die Dynamik von Systemen starrer Körper entwickelt, wobei auch das d'Alembertsche Prinzip und das Prinzip der virtuellen Leistungen im Vordergrund stehen. Es enthält ferner neben den allgemeinen Sätzen über Schwerpunkt, Impuls, Drehimpuls, Energie auch Einiges über freie und erzwungene Schwingungen. Eine ausführlichere Behandlung der Schwingungsprobleme ist Gegenstand des zweiten Abschnittes, der sich in folgende Paragraphen gliedert: Schwingungen mit zwei Freiheitsgraden, Normalkoordinaten, erzwungene Schwingungen, Schwingungen mit endlichem Freiheitsgrad, das Rayleighsche Prinzip, Stabilitätsprobleme, einfache kontinuierliche Schwinger, Schwingungen und Wellen, die Eigenschwingungen, erzwungene Schwingungen, das Rayleighsche Verfahren, Querschwingungen von Stäben, erzwungene Querschwingungen. Es wird daher in diesem Kapitel eine Reihe technisch wichtiger Schwingungsprobleme erörtert, welche sich bei Systemen mit endlichem Freiheitsgrad ergeben. Das 3. Kapitel behandelt die Systeme mit unendlich hohem Freiheitsgrad bzw. die Kontinua, wobei eine Reihe von Verfahren der Elastizitätstheorie und Hydrodynamik zur Geltung kommen. Es gliedert sich in folgende Paragraphen: Der räumliche Spannungszustand, Verschiebungen und Verzerrungen, Spannungen und Verzerrungen, feste elastische Körper, die elastostatischen Grundgleichungen, die Aufgaben der Festigkeitslehre, ebene Probleme, Schwingungen fester Körper, Plastizitätsbedingungen, Flüssigkeiten und Gase, die hydrodynamischen Grundgleichungen, Strom- und Wirbelfelder, einfache hydrodynamische Probleme, ebene Potentialströmungen, der unendlich lange Tragflügel, Tragflügel endlicher Länge, zähe Flüssigkeiten. Vielfach wird bei der Darstellung von der Tensorrechnung Gebrauch gemacht, welche fortlaufend mitentwickelt wird und schließlich in einem Anhang noch einmal zusammengefaßt erscheint.

Beim Studium des Buches fällt auf, daß der Verf. die Mechanik mehr vom Standpunkte des Mathematikers darlegt und kaum Beispiele bringt. Wie im Vorwort erwähnt wird, handelt es sich insbesondere beim zweiten und dritten Abschnitt um Wiedergabe von Vorlesungen, die für Studierende höherer Semester bestimmt sind. Der Fachmann wird natürlich die konsequente mathematische Durchdringung mit Befriedigung wahrnehmen. Es erscheint jedoch als ein gewisser Mangel, daß nur wenige im Text verstreute Anwendungsbeispiele angegeben sind, die

außerdem sehr stark idealisiert erscheinen und sich wenig an die technische Praxis anlehnen. Literaturhinweise fehlen fast völlig, lediglich am Ende des Buches ist eine Zusammenstellung von Werken beigefügt, die dem Inhalt nahestehen. Trotz dieser Mängel wird das Buch infolge seines hohen theoretischen Wertes von weiten Kreisen sehr begrüßt werden.

Dresden.

H. Neuber.

Prof. L. Balser, Einführung in die Kartenlehre (Kartennetze). 2. Aufl. 64 S. mit 50 Abb. Leipzig 1951. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis 3,— DM.

Das vorliegende Bändchen bringt die wichtigsten Kartenentwürfe und diskutiert deren Eigenschaften. Die Darstellung ist elementar und macht nur an wenigen Stellen von der Integralrechnung Gebrauch. Zur Veranschaulichung der Längenverzerrungen wird für die wichtigsten Entwürfe an einigen Stellen der Karte die Indikatritz, das Bild eines kleinen Kreises auf der Kugel, angegeben. Nach der Erörterung von flächentreuen und winkeltreuen Entwürfen wird im letzten Abschnitt auf einige Sonderentwürfe (gnomonische Projektion, Entwürfe von Aitoff, Hammer und Winkel) und Ergänzungen (Umbezifferung, Berücksichtigung der Abplattung, Gauß-Krügersche Koordinaten) eingegangen. Das Büchlein steht durch seine anschauliche und elementare Darstellungsart einem weiten Leserkreis offen und kann jedem empfohlen werden, der in die Entstehung der Land- und Sternkarten einen ersten Einblick gewinnen will.

Dresden.

G. Opitz.

Colloque de Géométrie différentielle tenu à Louvain du 11. au 14. avril 1951. (Centre belge de recherches mathématiques.) 235 S. Liège et Paris 1951. Georges Thone, Masson & Cie. Preis brosch 350 belg. fr., 2450 franz. fr.

Wie die mathematische Welt es nun schon seit einigen Jahren gewohnt ist, veranstalteten die Lütticher Mathematiker auch in diesem Jahr ein Colloquium, in dem führende Männer aus aller Welt zu Worte kamen. — Nachdem in den letzten Jahrzehnten eine projektive Differentialgeometrie sich gleichwertig neben die klassische metrische gestellt hat, ist es nun erstaunlich zu sehen, wie sich in den neueren Forschungen mehr und mehr topologische Gesichtspunkte in den Vordergrund schieben und bei der Behandlung klassischer Probleme ihre Fruchtbarkeit erweisen. Andere Vorträge gaben neue Ergebnisse über Riemannsche, Einsteinsche, elektromagnetische Geometrien. Der Bericht wird in erster Linie den Forscher auf dem Gebiet der Differentialgeometrie interessieren, aber auch der Mathematiker, der nicht unmittelbar auf diesem Gebiet arbeitet, wird sich an Hand dieses Berichtes einen Überblick verschaffen können, welche Fragen heute im Vordergrund des Interesses stehen.

Halle.

Ott-Heinrich Keller.

Prof. Dr. M. Zacharias (wissenschaftl. Mitarbeiter der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin), Einführung in die projektive Geometrie. (Mathematisch-physikalische Bibliothek Reihe 1 Nr. 6.) Vierte Aufl. 54 S. mit 21 Abb. Leipzig 1951. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis kart. 2,— DM.

Verf. führt in einer feinen, geistvollen Art den Leser, der nur Schulkenntnisse besitzt, in die Schönheiten der projektiven Geometrie ein und vermittelt ihm die Ehrfurcht vor ihren Schöpfern, ohne dabei Systematik und Vollständigkeit anzustreben. Erstellt die Persönlichkeiten und Leistungen von Desargues (Zentralperspektive, uneigentliche Elemente, Polarentheorie, Involutionen), Pascal (Pascalscher Satz), Poncelet (Dua-

lität), Steiner (Doppelverhältnis, Fundamentalsatz), v. Staudt (harmonische Würfe) vor uns hin.

Das Büchlein gibt gleichzeitig dem Laien einen ersten Einblick in das Gebiet, wie dem Kenner Freude und Anregung.

Halle.

Ott-Heinrich Keller.

D. J. Struik, (Prof. a. Massachusetts Inst. of Technology). Lectures on Classical Differential Geometry. VIII + 221 S. mit 120 Abb. Cambridge (Mass.) 1950. Addison Wesley Press. Preis geb. 6,— \$.

Das Buch ist entstanden aus Vorlesungen am Massachusetts Institute of Technology. Es bringt die klassischen Sätze über Kurven, Flächen, Geometrie auf der Fläche, Grundgleichungen und besondere Flächen (Minimalflächen, Einhüllende, Regelflächen u. a.). Die Figuren sind anschaulich und instruktiv. Auf die Auswahl der Übungsbeispiele ist große Sorgfalt verwendet; sie sind zahlreich und steigen in jedem Kapitel vom Leichterem zum Schwereren auf. Die Leistungen der Großen werden in ihrer historischen Entwicklung und Bedingtheit dem Leser einprägsam vor Augen geführt. Es werden überall die Fragen, die über den Rahmen des Buches hinausweisen, aufgezeigt und auf die Originalarbeiten verwiesen, so daß auch der Student, der sein Studium vertiefen will, mit Gewinn zu dem Buche greifen wird.

Halle.

Ott-Heinrich Keller.

Dr. P. Zühlke (Honorarprof. a. d. Univ. Marburg), Konstruktionen in begrenzter Ebene (Mathematisch-physikalische Bibliothek Reihe 1 Nr. 11.) 3. Aufl. 42 S. mit 65 Abb. Leipzig 1951. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis kart. 2,10 DM.

Verf. will zum Nachdenken darüber anregen, wie man sich beim Zeichnen zu helfen habe, wenn wesentliche Punkte außerhalb des Zeichenbrettes fallen. Er behandelt: Unzugängliche Punkte von zwei und mehr Geraden, Halbierung eines Winkels mit unzugänglichem Scheitel, unzugängliche Punkte von Kreisen. Verf. weist auf den Zusammenhang dieser Aufgaben mit denen mit beschränkten Hilfsmitteln, etwa zu kleiner Zirkel oder zu kurzer Lineale hin.

Das Buch wendet sich nicht nur an den, der praktisch zu zeichnen hat, sondern auch der Liebhaber und der Lehrer der Geometrie wird aus den vielen echt geometrischen Fragen und Gedanken des Büchleins wertvolle Anregung gewinnen.

Halle.

Ott-Heinrich Keller.

Dr. A. U. Huggenberger, Talsperren-Meßtechnik (Meßverfahren, Instrumente und Apparate für die Prüfung der Bauwerke in Massenbeton) VII + 132 S. m. 168 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1951. Springer-Verlag. Preis brosch. 22,50 DM.

Die im Talsperrenbau auftretenden meßtechnischen Aufgaben bestehen einmal in der Verfolgung der Veränderungen, die das Bauwerk während seines Entstehens durch die zunehmende Gewichtsbelastung und die Temperatur- und Feuchtigkeitsänderungen während des Abbindens erleidet, und zweitens in der Überwachung der bei der Inbetriebnahme einerseits durch den Wasserdruck, andererseits durch die atmosphärischen Einflüsse hervorgerufenen Spannungen und der durch sie bewirkten Gestaltsänderungen. Diese Aufgaben stellen besondere Anforderungen an die zu verwendenden Geräte und ihren Einbau, abgesehen von den Messungen der äußeren Verformung müssen die Geberteile unzugänglich einbetoniert werden. Es kommen also nur fernanzeigende, elektrische Methoden in Frage, und die Ausbildung der Geräte muß eine jahrelange Betriebssicherheit gewährleisten, da der Ausfall schon eines Gerätes die Überwachung gefährden kann. Der Schwerpunkt

liegt demnach in der mechanisch, elektrisch und korrosionsfesten Gestaltung und Einbettung der Geräte und Kabel bei gleichzeitig hohen Anforderungen an die Empfindlichkeit und Genauigkeit der Messung.

Im einzelnen handelt es sich innerhalb des Betonkörpers um Dehnungs-, Spannungs- und Temperaturmessungen, die auf zwei Grundformen basieren, der Frequenzänderung einer schwingenden Saite durch Längung oder Kürzung, oder der Änderung des elektrischen Leitwertes eines gespannten Drahtes mit der Spannung desselben. Die letztere Methode der Widerstandsmessung wird auch zur gleichzeitigen oder besonderen Temperaturmessung verwendet, ebenso zur Feuchtemessung. Eine zweite Gruppe umfaßt die Beobachtung des Wasserdruckes am Boden der Sperrmauer und des Porendruckes im Beton mit Hilfe manometrischer Methoden. Zur Messung der äußeren Verformung endlich dienen Lotungsgeräte, Nivelliergeräte und geodätische Triangulierungen.

Der Verfasser beschreibt in strenger Gliederung die verschiedenen Verfahren, die Konstruktion der einzelnen Geräte, ihren Einbau, ihre Bedienung und Eichung in aller Ausführlichkeit. Er läßt auch Nebendinge nicht unbeachtet, wo sie auf die dauernde Betriebssicherheit von Einfluß sein könnten. Durch zahlreiche Skizzen und Fotos wird die Konstruktion und der Einbau jedes Gerätes klar und überzeugend erläutert.

Nicht nur dem Bauingenieur ist das Buch ein ausgezeichnete und unentbehrlicher Berater. Es vermag auch für alle anderen Fachgebiete, insbesondere da, wo langjährige Betriebssicherheit unzugänglicher Meßstellen gefordert wird, eine Fülle wertvoller Anregungen zu geben und sei darum jedem Meßtechniker wärmstens empfohlen.

Dresden.

H. Faltin

L. Landau und E. Lifschitz (Akademie der Wissenschaften der UdSSR), *The classical theory of fields*. (Aus dem Russischen ins Englische übersetzt von M. Hamermesh). IX + 354 S. mit 12 Abb. Cambridge Mass., USA 1951. Addison-Wesley Press, Preis geb. 7,50 \$.

Dieses Buch ist Teil eines Lehrbuches der theoretischen Physik. Es behandelt das elektromagnetische und das Gravitationsfeld unter Ausschluß der Quantentheorie. Entgegen dem bei uns üblichen Verfahren, das vom Leichterem zum Schwereren fortschreitet, enthält das vorliegende Buch eine

systematische Darstellung der Theorie. Ausgangspunkt ist das Relativitätsprinzip und das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, mit denen zunächst die Kinematik der speziellen Relativitätstheorie abgeleitet wird. Es folgt die Relativitätsmechanik, die vom Prinzip der kleinsten Wirkung ausgeht. Dieses Prinzip wird dann erweitert auf den Fall, daß sich Ladungen im elektromagnetischen Feld bewegen. Auf diesem Wege werden die Feldgrößen eingeführt. Anschließend werden die Zusammenhänge zwischen den Feldgrößen, die Maxwell'schen Gleichungen, behandelt und daran angeschlossen das konstante Feld, elektromagnetische Wellen, geometrische Optik und Wellenoptik. Schließlich werden die Felder und die Strahlung bewegter Ladungen recht ausführlich dargestellt. Den Abschluß, fast ein Drittel des Buches, bildet die allgemeine Relativitätstheorie (Gravitationsfelder). Die klare, sorgfältige Darstellung macht das Studium des Buches zu einem großen Genuß. Für Studenten, die zum ersten Mal theoretische Physik lernen, ist es aber trotzdem nicht geeignet, weil es zu viel Kenntnisse voraussetzen muß. Wohl aber kann man es z. B. unseren Doktoranden und Aspiranten für ihre Fortbildung sehr empfehlen.

Dresden.

Recknagel.

Prof. Dr. F. Hennig, *Von tiefen und hohen Temperaturen*. (Eine allgemein verständliche Darstellung.) 84 S. m. 44 Abb. Leipzig 1951. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis kart. 3,40 DM.

Die vorliegende kleine Schrift bringt Fragen der Temperaturmessung dem naturwissenschaftlich gebildeten Leser nahe. Mathematische Mittel größeren Umfanges werden nicht angewendet, unsachliche Popularisierung aber trotzdem sorgfältig vermieden.

Inhalt: Einfachste Grundlagen der Temperaturskala und wichtigste Temperaturmeßgeräte werden eingangs geschildert. Es folgen Zusammenhänge von Molekularbewegung und Temperatur und damit die genaue Definition der Temperaturskala durch das ideale Gas; Zusammenhänge von elektromagnetischer Strahlung und Temperatur und damit die optische Pyrometrie einschließlich astrophysikalischer Folgerungen; Erzeugung und Messung tiefster Temperatur einschließlich thermodynamischer Definition der Temperaturskala.

Dresden.

Recknagel.

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Hefte eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten).

Dr. W. Krull (o. Prof. a. d. Univ. Bonn), *Elementare und klassische Algebra vom modernen Standpunkt*. (Sammlung Götschen Band 930) Bd. I, 2. Aufl. 136 S. Berlin 1952. Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis brosch. 2,40 DM.

Angerer-Ebert, *Technische Kunstgriffe bei physikalischen Untersuchungen*. 8., vollständig neubearbeitete und erweiterte Auflage. 350 S. mit 118 Abb. Braunschweig 1952. Verlag F. Vieweg & Sohn. Preis geb. 14,80 DM.